

基于结构性假设的路基沉降“S”型曲线证明

孙 强, 冶小平, 王媛媛

(中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100029)

摘 要: 根据路基沉降曲线多成“S”型, 基于土体结构的分级假设, 采用荷载分级传递的方法建立了荷载传递时间曲线, 并借助于应力与应变的对应关系证明了沉降-时间曲线的“S”型, 并分析了结构参数对曲线的影响。

关键词: 路基沉降; 结构; 沉降曲线

作者简介: 孙强(1981—), 男, 河北衡水人, 博士研究生, 从事工程地质与岩土工程研究, E-mail: sunqiang04@126.com。

0 引 言

目前大多数的沉降-时间曲线都是预测模型, 都是基于瞬时加载的情形。根据沉降机理, 关于沉降-时间曲线的“S”型特征已经得到证明^[1~5], 而这种证明更为重视的是数学力学上的证明, 并没有显示出岩土介质本身的结构特性。本文基于岩土介质的阻尼特性对瞬时加载下的一维沉降-时间曲线的“S”型, 从岩土体结构上加以证明。

1 模型与参数方程的建立

设想由加载所产生的沉降过程是受土体结构调节的产物, 而土体对沉降过程的调节作用, 可以概括为几个串联结构对加载的调节作用, 且各结构均具有相同的线性传递荷载的功能。当加载作用在第一级结构上时, 联立求解有

荷载储量方程

$$P(t) = KQ(t) \tag{1}$$

受力平衡方程

$$I(t) - Q(t) = \frac{d}{d}P(t) \tag{2}$$

可以得到第一级结构的传递荷载

$$Q_1(t) = \frac{1}{1 + KD}I(t) \tag{3}$$

式中, $P(t)$ 为结构的荷载储量; $Q(t)$ 为传递荷载; $I(t)$ 为结构加载; K 为常数, 相当于结构的平均滞后时间; D 为微分算子(即 $D = d/dt$)。

当加载传递到第二级具有相同调节能力 K 值的线性结构时, 其值相当于第一级结构的传递荷载, 按式(3)的形式得第二级结构的传递荷载

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= \frac{1}{(1 + KD)(1 + KD)}I(t) \\ &= \frac{1}{(1 + KD)^2}I(t) \end{aligned} \tag{4}$$

同理, 当传递荷载 n 具有相同 K 的线性结构(图 1)时, 传递荷载应为

$$Q_n(t) = \frac{1}{(1 + KD)^n}I(t) \tag{5}$$

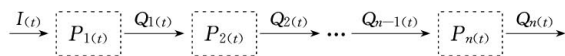


图 1 模型示意图

当 $I(t)$ 为极小时段(即瞬时)的传递荷载, 应用单位脉冲的概念, 瞬时加载 $I(t)$ 相当于单位脉冲 $\delta(t)$, 此时的 $Q(t)$ 即为脉冲瞬时响应函数, 或称为瞬时单位线 $u(t)$ 。于是式(5)可以表示为

$$u(t) = \frac{1}{(1 + KD)^n}\delta(t) \tag{6}$$

对式(6)取拉普拉斯(Laplace)变换, 即

$$L[(1 + KD)^n u(t)] = L[\delta(t)] \tag{7}$$

因 $L[\delta(t)] = 1$,

将式(7)展开并化简得

$$L[u(t)] = \frac{1}{(1+KD)^n} = \frac{1}{K^n} \frac{1}{\left(\frac{1}{K} + D\right)^n} \quad (8)$$

进行逆变换得

$$u(t) = \frac{1}{K\Gamma(n)} \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} e^{-t/K} \quad (9)$$

上式即传递荷载瞬时单位线的数学方程式,其中 n 、 K 为参数。

2 荷载瞬时单位线的性质

荷载瞬时单位线是一条两参数的单峰铃形曲线。参数 n 、 K 为参数同时影响瞬时单位线的偏态程度和集中程度。当 K 为常数时,若 n 越大,则峰值出现时间推后,峰值越低,过程线平缓,底宽加长(图 2)。但是,两参数的变化对瞬时单位线产生相互制约的影响。

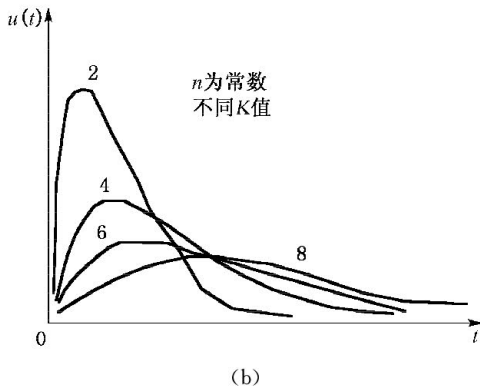
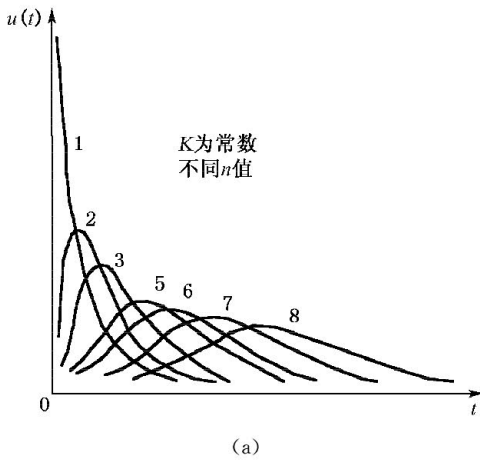


图 2 参数 n 、 K 对荷载瞬时单位线的影响

由式(9)可知, n 值不能小于 1, 若小于 1, 峰值

为虚值, 峰值出现时间(简称峰现时间)为负值; 当 n 接近于 1 时, 峰现时间接近于 0, 峰值接近于 $+\infty$ 。

将式(9)对 t/K 进行微分得

$$\dot{u}(t) = \left[\frac{1}{K\Gamma(n)} e^{-t/K} (n-1) \left(\frac{t}{K}\right)^{n-2} - \frac{1}{K\Gamma(n)} e^{-t/K} \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} \right] d\frac{t}{K} \quad (10)$$

令 $\dot{u}(t) = 0$, 求得荷载瞬时单位线得峰现时间

$$t_p = (n-1)K \quad \text{或} \quad \frac{t_p}{K} = n-1 \quad (11)$$

把式(11)代入式(9)得

$$u(t_p) = \frac{1}{K\Gamma(n)} (n-1)^{(n-1)} e^{-(n-1)} \quad (12)$$

从式(11)和式(12)可知, 瞬时单位线得峰现时间 t_p 与参数 n 、 K 成正比, 而峰现时间 $u_p(t)$ 与参数 n 、 K 成反比, 故 t_p 与 $u_p(t)$ 的乘积为 n 的函数, 即

$$\begin{aligned} t_p u_p(t) &= (n-1)K \frac{1}{K\Gamma(n)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-1)} \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \\ &= f(n) \end{aligned} \quad (13)$$

由此可见, 在 n 为常数的情况下, 瞬时单位线的峰值和峰现时间的乘积为常数, 而且与 K 值无关。同时, 当 n 一定时, 如对式(13)两边取对数并将 t_p 与 $u_p(t)$ 对应的点绘在对数纸上, 则不同 n 值的线是斜率均为 -1 的直线簇。

3 沉降曲线的“S”型

假设荷载的瞬时曲线与其所对应的应变有良好的对应关系, 则由式(9)可得

$$\epsilon(t) = \xi u(t) = \frac{\xi}{K\Gamma(n)} \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} e^{-t/K} \quad (14)$$

式中, ξ 为土体模量 E 的函数; ϵ 为土体应变。因此沉降曲线可以表式为

$$S(t) = \int_0^t \epsilon(t) dt \quad (15)$$

则有

$$\dot{S}(t) = \varepsilon(t) > 0 \tag{16}$$

$$\ddot{S}(t) = \dot{\varepsilon}(t)$$

$$= \xi(E) \left[\frac{1}{K\Gamma(n)} e^{-t/K} (n-1) \left(\frac{t}{K}\right)^{n-2} - \frac{1}{K\Gamma(n)} e^{-t/K} \left(\frac{t}{K}\right)^{n-1} \right] d \frac{t}{K} \tag{17}$$

由 $\dot{\varepsilon}(t) = 0$, 有

$$\ddot{S}(t) = \begin{cases} > 0 & t \in (0, t_p) \\ < 0 & t \in (t_p, \infty) \end{cases} \tag{18}$$

因此 $S(t)$ 函数呈现“S”型。

4 结 语

路基沉降是一个复杂的岩土工程问题,其沉

降曲线多成“S”型,本文从土体结构的分级假设角度,证明了沉降-时间曲线的“S”型,并分析了结构参数对曲线的影响。

参 考 文 献

- [1] 谭昌明,徐日庆,周建,等. 软黏土路基沉降的一维固结反演与预测[J]. 中国公路学报, 2002, 15(04): 14~16.
- [2] 王伟,卢延浩,王晓妮. 软土路基线性加载沉降曲线的研究[J]. 岩土力学, 2006, 27(5): 791~794.
- [3] 宰金珉,梅国雄. 全过程的沉降量预测方法研究[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 322~325.
- [4] 梅国雄,宰金珉,赵维炳,等. 地基沉降-时间曲线形态的证明及其应用[J]. 土木工程学报, 2005, 38(6): 69~72.
- [5] 梅国雄,宰金珉,殷宗泽,等. 沉降-时间曲线呈“S”型的证明[J]. 岩土力学, 2004, 25(1): 20~22.