

地基沉降的几种预测方法的可靠性分析

黄广军

(深圳市宝安区土地储备开发中心, 深圳 518102)

摘要:用数学方法,对预测地基沉降的双曲线法、浅冈法(Asaoka)和沉降差法的表达式进行分析,探讨其拟合参数的误差对沉降预测结果的影响,并且结合工程实例,对各种方法的预测结果的可靠性进行评估。分析结果表明:要判断一个沉降预测结果的可靠性,不仅要看线性拟合的好坏(相关系数的大小),而且还要看它的拟合参数的误差放大系数的大小;采用浅冈法预测时,若拟合参数 β_1 值较大,则其相应的误差放大系数也较大,因此 β_1 的误差对沉降预测结果的影响较大。

关键词:地基沉降;沉降预测;双曲线法;浅冈法(Asaoka);沉降差法

作者简介:黄广军(1969—),男,博士,高级工程师,注册土木工程师(岩土),主要从事市政工程管理及岩土工程应用研究。

0 引言

深圳地处珠江三角洲,软土地基分布范围广。在软土地基上修建市政道路,目前主要采用堆载预压排水固结法进行地基处理。在堆载预压法处理软土地基中,由于理论计算的地基沉降和固结度一般误差较大,因此常通过实测沉降资料推算地基沉降量,以便较准确地估计地基的剩余沉降和预压土卸载时间。推算地基沉降的方法有很多,如双曲线法、浅冈法(Asaoka)和沉降差法。这几种方法都是通过线性拟合来预测地基的沉降。

在一工程实例中,笔者采用浅冈法进行分析时发现,设置的起始点和时间间隔对预测结果影响很大。尽管线性拟合都很好,但预测的地基剩余沉降的相对误差却高达53%(详见表3)。

浅冈法的理论基础是严密的,那么,其预测结果的不稳定性是什么原因造成的呢?

为了弄清这个问题,笔者从数学的角度来进行分析,发现了浅冈法的预测沉降的表达式“病态”,认为这是影响其预测精度的一个主要因素。用同样的方法,也对双曲线法和沉降差法的预测沉降的表达式作了分析。此外,还结合工程实例对上述几种方法的预测结果的可靠性进行评估。

1 浅冈法、双曲线法和沉降差法简介

1.1 浅冈法

浅冈法在一维垂直固结方程的基础上,推导出线性拟合方程:

$$S_{t_j+\Delta t} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \beta_{t_j} \quad (1)$$

式中, S_{t_j} 、 $S_{t_j+\Delta t}$ 分别为 t_j 、 $(t_j + \Delta t)$ 时刻的地基沉降, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ 。对满载后的散点(S_{t_j} , $S_{t_j+\Delta t}$)按式(1)作线性拟合,求得待定参数 β_0 、 β_1 后,按式(2)推算地基的最终沉降量 $S_{T \rightarrow \infty}$:

$$S_{T \rightarrow \infty} = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} \quad (2)$$

1.2 双曲线法

双曲线法是假设满载后地基沉降发展规律符合双曲线形式,即

$$\frac{t - t_0}{S_t - S_0} = a + b \cdot (t - t_0) \quad (3)$$

式中, t_0 、 S_0 分别为起始点的时间和相应的地基沉降,起始点应设置在满载以后; S_t 为 t 时刻的地基沉降。按式(3)作线性拟合求得待定参数 a 、 b 后,按式(4)推算地基的最终沉降量 $S_{T \rightarrow \infty}$:

$$S_{T \rightarrow \infty} = S_0 + \frac{1}{b} \quad (4)$$

1.3 沉降差法

沉降差法建立在太沙基固结理论的基础上,可在填土阶段(满载之前)提早预测地基的最终沉降量^[1]。对于满载阶段,且等时间间隔的情况,其简化形式为^[2]

$$\ln(S_{(t_j+\Delta t)} - S_{t_j}) = D - \beta(t_j - t_0) \quad (5)$$

式中, t_0 为起始点的时间(起始点应设置在满载以后); t_j 是满载之后的任意时刻且 $t_j > t_0$; Δt 为时间间隔; S_{t_j} 、 $S_{(t_j+\Delta t)}$ 分别为 t_j 、 $(t_j + \Delta t)$ 时刻的地基累计沉降量, $j = 1, 2, 3, \dots$, β 与固结度计算式 $U_t = 1 - \alpha \cdot e^{-\beta t}$ 中 β 的含义一致。

按式(5)作线性拟合求得参数 D 和 β 后,根据式(6)预测地基的最终沉降量:

$$S_{T \rightarrow \infty} = S_{T_0} + \frac{e^D}{1 - e^{-\beta \Delta t}} \cdot e^{-\beta(T_0 - t_0)} \quad (6)$$

式中, S_{T_0} 为 T_0 ($T_0 > t_0$) 时的实测累计沉降,因此 $(S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0})$ 实际上就是 T_0 时刻以后的地基剩余沉降。

2 双曲线法、浅冈法和沉降差法的可靠性分析

为了对各种方法的预测结果的可靠性进行评估,下面用数学方法分别对双曲线法、浅冈法、沉降差法的沉降预测表达式进行分析,探讨其通过线性拟合求得的参数的误差对沉降预测结果的影响程度。

2.1 浅冈法

对于浅冈法,对式(2)作全微分,得

$$\begin{aligned} dS_{T \rightarrow \infty} &= \frac{d\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} \cdot \frac{d\beta_1}{1 - \beta_1} \\ &= S_{T \rightarrow \infty} \cdot \left(\frac{d\beta_0}{\beta_0} + \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \cdot \frac{d\beta_1}{\beta_1} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

经整理,得到 T_0 时刻以后地基剩余沉降的相对误差为

$$\begin{aligned} \frac{dS_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} &= \left(\frac{S_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} \right) \frac{d\beta_0}{\beta_0} + \\ &\left(\frac{S_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} \cdot \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \right) \frac{d\beta_1}{\beta_1} \end{aligned} \quad (8)$$

记 $k_{\text{浅}\beta_0}$ 、 $k_{\text{浅}\beta_1}$ 分别为浅冈法线性拟合参数 β_0 、 β_1 的误差放大系数,则

$$k_{\text{浅}\beta_0} = \frac{S_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} \quad (9)$$

$$k_{\text{浅}\beta_1} = \left(\frac{S_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} \right) \cdot \left(\frac{\beta_1}{1 - \beta_1} \right) \quad (10)$$

$k_{\text{浅}\beta_0}$ 、 $k_{\text{浅}\beta_1}$ 的含义是,线性拟合参数 β_0 、 β_1 的相对误差分别为 1% 时,引起的地基剩余沉降预测值的相对误差分别为 $(k_{\text{浅}\beta_0})\%$ 、 $(k_{\text{浅}\beta_1})\%$ 。

式(10)中, $k_{\text{浅}\beta_1}$ 随着 β_1 的增大而急剧增大。当 $\beta_1 = 0.5$ 时, $k_{\text{浅}\beta_1} = 1$; 当 β_1 趋于 1 时, $k_{\text{浅}\beta_1}$ 趋于无穷大。在接近卸载时地基的剩余沉降一般小于总沉降的 1/5, 如果 $\beta_1 = 0.9$, 则由此估算的 β_1 的误差放大系数 $k_{\text{浅}\beta_1}$ 高达 45 倍。因此,拟合参数 β_1 的微小误差有可能导致预测结果的显著误差,可谓“失之毫厘,谬以千里”。对于这种情况,虽然浅冈法的理论基础是严密的,但是,其预测沉降的表达式即式(2)是“病态”的。

2.2 双曲线法

对于双曲线法,当与设置的起始点 t_0 对应的地基累计沉降 S_0 为常数时,对式(4)作微分,得

$$dS_{T \rightarrow \infty} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{db}{b} \quad (11)$$

经整理,得到 T_0 时刻以后地基剩余沉降的相对误差为

$$\frac{dS_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} = -\frac{1}{b(S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0})} \cdot \frac{db}{b} \quad (12)$$

记 $k_{\text{双}b}$ 为双曲线法线性拟合参数 b 的误差放大系数,则

$$k_{\text{双}b} = \frac{1}{b(S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0})} \quad (13)$$

2.3 沉降差法

对于沉降差法,当时间间隔 Δt 、 $(T_0 - t_0)$ 及 S_{T_0} 为常数时,对式(6)作全微分,得

$$\begin{aligned} dS_{T \rightarrow \infty} &= \frac{e^D dD}{1 - e^{-\beta \Delta t}} \cdot e^{-\beta(T_0 - t_0)} - \\ &\left(\frac{e^D}{1 - e^{-\beta \Delta t}} \right) e^{-\beta(T_0 - t_0)} (T_0 - t_0) d\beta - \\ &\frac{e^D \cdot e^{-\beta \Delta t} \cdot \Delta t}{(1 - e^{-\beta \Delta t})^2} \cdot e^{-\beta(T_0 - t_0)} \cdot d\beta \end{aligned} \quad (14)$$

$$dS_{T \rightarrow \infty} = (S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}) \left\{ D \cdot \frac{dD}{D} - \right.$$

$$\left[\beta(T_0 - t_0) + \frac{\beta \cdot \Delta t}{e^{\beta \cdot \Delta t} - 1} \right] \frac{d\beta}{\beta} \quad (15)$$

经整理,得到 T_0 时刻以后地基剩余沉降的相对误差为

$$\frac{dS_{T \rightarrow \infty}}{S_{T \rightarrow \infty} - S_{T_0}} = D \cdot \frac{dD}{D} - \left[\beta(T_0 - t_0) + \frac{\beta \cdot \Delta t}{e^{\beta \cdot \Delta t} - 1} \right] \frac{d\beta}{\beta} \quad (16)$$

记 $k_{\text{沉}D}$ 、 $k_{\text{沉}\beta}$ 分别为沉降差法线性拟合参数 D 、 β 的误差放大系数,则

$$k_{\text{沉}D} = D \quad (17)$$

$$k_{\text{沉}\beta} = \beta(T_0 - t_0) + \frac{\beta \cdot \Delta t}{e^{\beta \cdot \Delta t} - 1} < \beta(T_0 - t_0) + 1 \quad (18)$$

2.4 判断预测结果可靠性的依据

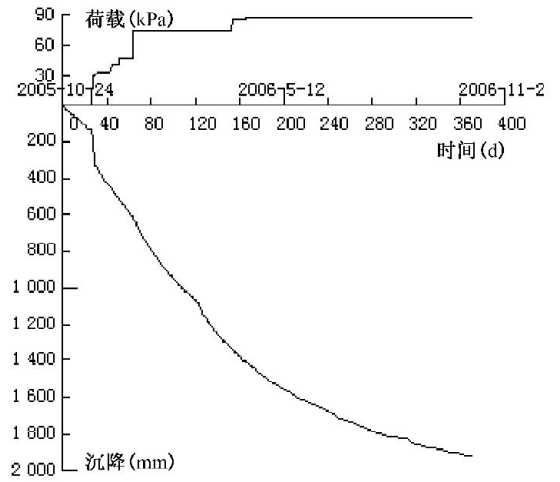
双曲线法、浅冈法和沉降差法都是通过线性拟合来预测地基的沉降。线性拟合的好坏以相关系数的大小来表示,它反映的是拟合结果的可信度,相关系数越大,说明所统计的数据越符合该预测方法所假设的线性关系。如果所统计的数据不符合该预测方法所假设的线性关系,则该预测方法不适用。

而拟合参数的误差放大系数则表示该拟合参数的误差对预测结果的影响程度,拟合参数的误差放大系数越小,那么预测结果对拟合参数误差的敏感度就越低,预测结果就越稳定。

因此,要判断一个沉降预测结果的可靠性,首先要看线性拟合的好坏(相关系数的大小),其次还要看它的拟合参数的误差放大系数的大小。

3 工程实例及分析

某市政道路位于深圳滨海滩涂,现状场地标高约 2.7 m,地基土层自上而下依次为:人工吹填淤泥层(已沉积约 10 年),厚度约 2.7 m;淤泥层,厚度约 5.9 m;砂层,厚度约 2.1 m;下卧淤泥层,厚度约 1.8 m;再往下为亚黏土层。道路红线宽度 50 m,采用排水固结法进行地基处理,塑料排水带间距 1.1 m,穿透下卧淤泥层。地基上铺设砂垫层厚度 0.5 m,路基填土厚度(含预留沉降量)2.5 m,堆载预压土层厚度 2.0 m。地基沉降-时间曲线及加载-时间曲线如附图所示。



附图 地基沉降-时间曲线及加载-时间曲线

设置的起始点和时间间隔对各种方法预测结果的影响分别列于表 1~表 3 中。从表中可看出,设置的起始点、时间间隔对各种方法的预测结果都有一定的影响。其中,对沉降差法、双曲线法的影响较小,偏差一般不大于 20%;而对浅冈法的影响较大,偏差高达 53%。同一种预测方法,得出多个不同的预测结果,其中哪一个预测结果更为可靠呢?

(1) 对于双曲线法,设置不同的起始点时,拟合参数的误差放大系数相差不大,均为 2 倍左右,因此可直接根据线性拟合的相关系数来判断。以满载后的第 2 天或第 10 天作为起始点时,相关系数较大,可认为相应的预测结果较可靠。详见表 1。

(2) 对于沉降差法,设置不同的起始点和时间间隔时,拟合参数的误差放大系数相差不大, $k_{\text{沉}D}$ 为 4 倍左右、 $k_{\text{沉}\beta}$ 为 2 倍左右,因此也可直接根据线性拟合的相关系数来判断。以满载后的第 2 天作为起始点、时间间隔为 30 天或 40 天时,相关系数较大,可认为相应的预测结果较可靠。详见表 2。

(3) 对于浅冈法,设置不同的起始点、时间间隔时,虽然线性拟合的线性相关系数 R^2 均大于 0.99,但预测结果却相差较大,偏差高达 53%(详见表 3)。这种良好的线性关系具有很大的“迷惑性”,预测者难以根据直线拟合的线性相关系数的大小来判断预测结果的可靠性。这时,再看看拟合参数的误差放大系数,发现拟合参数 β_0 的误差放大系数 $k_{\text{浅}\beta_0}$ 为 10 倍左右、拟合参数 β_1 的误差放大

系数 $k_{浅\beta_1}$ 为 50 ~ 400 倍。显然,拟合参数 β_1 的细微变化将引起预测结果的显著变化。在表 3 的几个预测结果中,以满载后的第 2 天作为起始点、时间间隔为 30 天时,拟合参数 β_1 的误差放大系数 $k_{浅\beta_1}$ 相对较小,可认为该预测结果相对来说比较可靠,事实上,该预测结果也比较接近沉降差法的。

冈法预测时,时间间隔分别设置为 30 天、20 天、10 天、5 天时,拟合参数 β_1 依次增大,误差放大系数 $k_{浅\beta_1}$ 也依次明显增大。由此可见,拟合参数 β_1 的误差放大系数 $k_{浅\beta_1}$ 与拟合参数 β_1 成正比,而拟合参数 β_1 与设置的时间间隔成反比。因此,为减轻 β_1 的误差对预测结果的影响,设置的时间间隔应尽量大些,不宜过小。

对本工程实例作进一步分析,还发现,采用浅

表 1 设置的起始点对双曲线法预测结果的影响

| 以满载后的某一天为起始点 (d) | 线性拟合情况 | | | 地基沉降预测结果 | | | 拟合参数的误差放大系数 $k_{双b}$ |
|------------------|-----------|----------|------------|----------|----------|------------------|----------------------|
| | 参数 a | 参数 b | 相关系数 R^2 | 总沉降 | | 剩余沉降 相对误差 (%) | |
| | | | | 预测值 (mm) | 预测值 (mm) | | |
| 2 | 0.188 756 | 0.001 04 | 0.990 | 2 374.1 | 452.7 | — | 2.124 |
| 10 | 0.217 579 | 0.001 02 | 0.988 | 2 436.4 | 515.0 | 13.8 | 1.903 |
| 20 | 0.245 996 | 0.001 03 | 0.968 | 2 472.8 | 551.4 | 21.8 | 1.760 |
| 40 | 0.270 44 | 0.001 20 | 0.960 | 2 404.6 | 483.2 | 6.7 | 1.724 |

注: 1. 已满载 200 天; 2. 计算相对误差的基准: 起始点为满载后两天的计算结果; 3. 对于起始点不同的情况,式(11)、式(12)不适用。

表 2 设置的起始点和时间间隔对沉降差法预测结果的影响

| 以满载后的某一天为起始点 (d) | 时间间隔 (d) | 线性拟合情况 | | | 地基沉降预测结果 | | | 拟合参数的误差放大系数 | |
|------------------|----------|--------|------------------|------------|----------|----------|------------------|-------------|--------------|
| | | 参数 D | 参数 β (1/d) | 相关系数 R^2 | 总沉降 | | 剩余沉降 相对误差 (%) | $k_{沉D}$ | $k_{沉\beta}$ |
| | | | | | 预测值 (mm) | 预测值 (mm) | | | |
| 2 | 30 | 4.834 | 0.007 04 | 0.932 | 2 079.7 | 158.3 | — | 4.834 | 2.292 |
| 2 | 10 | 3.850 | 0.007 624 | 0.778 | 2 057.6 | 136.2 | -13.9 | 3.850 | 2.472 |
| 2 | 20 | 4.499 | 0.007 373 | 0.869 | 2 068.3 | 146.9 | -7.2 | 4.499 | 2.388 |
| 2 | 40 | 5.086 | 0.006 964 | 0.957 | 2 083.3 | 161.9 | 2.3 | 5.086 | 2.246 |
| 10 | 30 | 4.744 | 0.006 728 | 0.888 | 2 090.7 | 169.3 | 6.9 | 4.744 | 2.181 |
| 20 | 30 | 4.673 | 0.006 698 | 0.868 | 2 091.8 | 170.4 | 7.6 | 4.673 | 2.108 |
| 30 | 30 | 4.626 | 0.006 898 | 0.854 | 2 084.8 | 163.4 | 3.2 | 4.626 | 2.073 |

注: 1. 已满载 200 天; 2. 计算相对误差的基准为起始点为满载后两天、时间间隔为 30 天的计算结果; 3. 参数 D 与时间间隔有关,对于不同时间间隔的情况,式(15)、式(16)不适用。

表 3 设置的起始点和时间间隔对浅冈法预测结果的影响

| 以满载后的某一天为起始点 (d) | 时间间隔 (d) | 线性拟合情况 | | | 地基沉降预测结果 | | | 拟合参数的误差放大系数 | |
|------------------|----------|--------------|--------------|------------|----------|----------|------------------|----------------|----------------|
| | | 参数 β_0 | 参数 β_1 | 相关系数 R^2 | 总沉降 | | 剩余沉降 相对误差 (%) | $k_{沉\beta_0}$ | $k_{浅\beta_1}$ |
| | | | | | 预测值 (mm) | 预测值 (mm) | | | |
| 2 | 10 | 157.3 | 0.923 1 | 0.999 | 2 045.7 | 124.3 | — | 16.4 | 197.5 |
| 2 | 5 | 83.6 | 0.958 9 | 0.999 | 2 033.3 | 111.9 | -9.9 | 18.2 | 423.8 |
| 2 | 20 | 297.6 | 0.854 9 | 0.998 | 2 050.9 | 129.5 | 4.2 | 15.8 | 93.3 |
| 2 | 30 | 400.2 | 0.807 2 | 0.998 | 2 075.2 | 153.8 | 23.7 | 13.5 | 56.5 |
| 10 | 10 | 137.2 | 0.934 3 | 0.998 | 2 089.7 | 168.3 | 35.4 | 12.4 | 176.7 |
| 20 | 10 | 128.6 | 0.939 1 | 0.998 | 2 112.5 | 191.1 | 53.7 | 11.0 | 170.5 |
| 30 | 10 | 137.9 | 0.933 9 | 0.997 | 2 089.0 | 167.6 | 34.8 | 12.5 | 176.3 |

注: 1. 已满载 200 天; 2. 计算相对误差的基准为起始点为满载后两天、时间间隔为 10 天的计算结果。

对于本文中的工程实例,从表 1~3 中还可看出,双曲线法的拟合参数误差放大系数较小,沉降差法次之,浅冈法的最大。由于本文仅就各种预测方法的表达式进行分析,因此这里所说的双曲线法的拟合参数误差放大系数较小并非意味着其预测结果较符合工程实际。探讨哪种预测方法的预测结果更符合实际,还应该考虑该方法本身的理论基础及其对特定工程实际情况的适用性等诸多因素,在此不作深入阐述。从表 1~3 中来看,浅冈法和沉降差法的预测结果比较接近,而双曲线法预测的地基沉降值较大。

4 结 语

本文用数学方法,对预测地基沉降的双曲线法、浅冈法和沉降差法的表达式进行分析,探讨其拟合参数的误差对沉降预测结果的影响,并且结合工程实例,对各种方法的预测结果的可靠性进行评估。

(1) 线性拟合的好坏(以相关系数的大小来表示)反映的是拟合结果的可信度,而拟合参数的误差放大系数则表示该拟合参数的误差对预测结果的影响程度。因此,要判断一个沉降预测结果的可靠性,不仅要看线性拟合的好坏(相关系数的大

小),而且还要看它的拟合参数的误差放大系数的大小。如果拟合参数的误差放大系数较大,那么预测结果对拟合参数敏感度高,将导致其稳定性较差。

(2) 对于本文中的工程实例,双曲线法、沉降差法的拟合参数误差放大系数较小,而浅冈法的较大。

(3) 采用浅冈法预测时,拟合参数 β_1 的误差放大系数 $k_{\text{浅}\beta_1}$ 与 β_1 成正比,而 β_1 与设置的时间间隔成反比。因此,为减轻 β_1 的误差对预测结果的影响,设置的时间间隔应尽量大些;当 β_1 过大时(如 $\beta_1 > 0.9$),其误差放大系数也较大, β_1 的细小误差可能会引起预测结果的显著误差。

本文只对双曲线法、浅冈法和沉降差法作了分析,对于其他预测方法,有兴趣的读者可参照此思路进行分析。

参 考 文 献

- [1] 黄广军. 分级加载条件下提早预测地基沉降的沉降差法[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(6).
- [2] 黄广军. 沉降差法在恒载阶段的软土地基沉降预测中的应用[J]. 岩土工程界, 2007, 10(7).