强夯加固的动态有限元法分析研究

宋修广　　卢盛松　　李维寅

(河海大学岩土工程研究所　南京　210098)　(济南市公路管理局　济南　250012)

摘　要　在动态形函数的基础上,提出了强夯动力计算的动态有限单元法,建立和推导了相关的有限元公式.该方法克服了以往一般有限元法计算强夯动力问题时无法考虑加固土质振动特性等缺点,能较实际地反映强夯加固的动力特性.并编制了动态有限单元法计算程序,经实例计算表明,结果是较满意的,说明文中所提出的方法正确可行.

关键词　动态形函数 有限单元法 强夯加固

中图号　TU472.1

目前,强夯问题的有限元法分析,均采用与静力分析相同的位移形函数,即不考虑振动因素所产生的影响,可称之为一般动力有限元法.实际上,对于动力加固问题,单元位移函数不仅与单元形状及所选坐标有关,还与土质自振频率有关.因此,在进行强夯的动力有限元分析时,采用只与坐标有关的位移形函数显然与实际情况不符,必然存在一定的误差.本文在文献[1]的动态形函数概念的基础上,采用一种考虑土质振动特性的有限元法,即动态有限单元法[2]来分析强夯动力问题.该方法将弥补一般动力有限元法无法反映自振频率影响的不足,可以对成层土或基岩埋深不同等情况进行工程计算.另外,结合强夯法加固的特点,在轴对称坐标上用动态有限元法建立并推导计算公式,又编制了有限元程序.

1　轴对称动态有限元公式的建立和推导

1.1　动态形函数矩阵

当结构振动时,其振动位移场不仅与时间 t 有关,而且还与振动频率有关,因此合理的位移模式应为[3]

$$\boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{N}(x, y, z, \omega)]^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}(t)$$

式中:$\boldsymbol{u}(t)$——单元内任意一点的位移列阵;$\boldsymbol{U}(t)$——单元结点位移列阵;$\boldsymbol{N}(x, y, , z, \omega)$——单元动态形函数;$\omega$——结构的固有频率.

动力问题的轴对称平衡微分方程的位移形式为:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2}\right) = \frac{2(1+\mu)\rho}{E}\ddot{u}_r \\
&\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{1-2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{2(1+\mu)\rho}{E}\ddot{u}_z
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

式中:μ——土的泊松比;ρ——土的密度,g/cm³;E——土的弹性模量,kPa;u_r,u_z——土体内任一点的位移.

参照一般有限元法,三角形三结点单元内任一点的位移可写成

$$U_r = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N}_{ri} u_i \qquad U_z = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{N}_{ri} w_i \tag{2}$$

式中 u_i,w_i 为结点位移.

将式(2)按频率展开为

$$U_k = \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \boldsymbol{N}_{rk} q \mathrm{e}^{i\omega t} \qquad (k = r, z) \tag{3}$$

收稿日期:1998-04-13

第一作者简介:宋修广,男,博士,岩土工程专业,主要从事软土地基处理方面的研究.

式中：$e^{i\omega t}$——指数衰减函数；q——相应于单元结点位移列阵 u 的振幅列阵.

将式(3)代入(1)中，在满足精度要求的前提下将其展开，取前三项得三对控制方程为：

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 N_{0r}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 N_{0z}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 N_{0r}}{\partial z^2} + \alpha_1 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N_{0r}}{\partial r} - \frac{N_{0r}}{r^2}\right) = 0 \tag{4}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 N_{1r}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 N_{1z}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 N_{1r}}{\partial z^2} + \alpha_1 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N_{1r}}{\partial r} - \frac{N_{1r}}{r^2}\right) = 0 \tag{5}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 N_{2r}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 N_{2z}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 N_{2r}}{\partial z^2} + \alpha_1 \left(\frac{1}{r}\frac{\partial N_{2r}}{\partial r} - \frac{N_{2r}}{r^2}\right) = -\beta N_{0r} \tag{6}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 N_{0z}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 N_{0r}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 N_{0z}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{1}{r}\frac{\partial N_{0r}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{0z}}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 N_{1z}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 N_{1r}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 N_{1z}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{1}{r}\frac{\partial N_{1r}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{1z}}{\partial r} = 0 \tag{8}$$

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 N_{2z}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 N_{2r}}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 N_{2z}}{\partial r^2} + \alpha_2 \frac{1}{r}\frac{\partial N_{2r}}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{2z}}{\partial r} = -\beta N_{2z} \tag{9}$$

其中
$$\alpha_1 = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{1-2\mu} \qquad \beta = 2(1+\mu)\frac{\rho}{E}$$

N_{ir}，N_{iz}（$i = 0, 1, 2,$）分别为 r，z 方向的（零阶、一阶和二阶）动态位移形函数.

根据位移形函数满足完备性和连续性的要求，N_{0r}和 N_{0z}应满足：

$$\begin{aligned} &r = r_i, z = z_i, u_r = U_i, u_z = W_i \qquad r = r_j, z = z_j, u_r = U_j, u_z = W_j \\ &r = r_m, z = z_m, u_r = U_m, u_z = W_m \end{aligned} \tag{10}$$

式中 U，W 为边界位移. 而对于 N_{1r}，N_{1z}和 N_{2r}应满足单元边界处为零的条件.

对于三角形单元，式(4)和式(7)的齐次方程可取如下形式的解：

$$N_{0r}u = C_1 + C_2 r + C_3 z \qquad N_{0z}w = C_4 + C_5 r + C_6 z \tag{11}$$

式中待定系数 $C_1 \sim C_6$ 可根据式(10)确定. 将式(10)代入式(11)可得到线性方程组：

$$GC = U$$

式中：G——系数矩阵；C——待定系数列向量，分别为

$$G = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix} \qquad C = [C_1 \quad C_2 \quad C_3]^{\mathrm{T}}$$

由以上可得
$$N_{0k} = [1 \quad r \quad z]\, G^{-1} \qquad (k = r, z) \tag{12}$$

对于式(5)和(8)中的一阶动态形函数，可假设为：

$$N_{1k}U = D_i + D_{i+1} r + D_{i+2} z \qquad (k = r, i = 1; k = z, i = 4)$$

式中 $D_1 \sim D_6$ 为待定系数.

根据形函数满足在单元边界上为零的条件有

$$0 = N_{1k}\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} D_n \\ D_{n+1} \\ D_{n+2} \end{Bmatrix}$$

对于一给定单元，已知系数矩阵 G^{-1}不为零，因此对应的一阶动态形函数应为 $N_{1k} = 0(k = r, z)$.

对应于式(6)和(9)中的二阶动态位移形函数可假设为：

$$N_{2k}U_k = A_i + A_{i+1} r + A_{i+2} z - \beta\left(\frac{C_i}{4\alpha_1}r^2 + \frac{C_i}{4}z^2 + \frac{C_{i+1}}{12\alpha_1}r^3 + \frac{C_{i+1}}{4}rz^2 + \frac{C_{i+2}}{4\alpha_1}r^2 z + \frac{C_{i+2}}{12}z^3\right) \tag{13}$$

$$(k = r\ \text{时}, i = 1; k = z\ \text{时}, i = 4)$$

$A_1 \sim A_6$ 为待定系数，根据在单元边界上为零的条件来确定，应有：

$$0 = GA - \beta H_r C \tag{14}$$

式中：A——待定的系数列阵；H_r——系数列阵：

$$H_r = \begin{bmatrix} (\frac{r_i^2}{4\alpha_1}+\frac{z_i^2}{4}) & (\frac{r_i^3}{12\alpha_1}+\frac{r_iz_i^2}{4}) & (\frac{r_i^2z_i}{4\alpha_1}+\frac{z_i^3}{12}) \\ (\frac{r_j^2}{4\alpha_1}+\frac{z_j^2}{4}) & (\frac{r_j^3}{12\alpha_1}+\frac{r_jz_j^2}{4}) & (\frac{r_j^2z_j}{4\alpha_1}+\frac{z_j^3}{12}) \\ (\frac{r_m^2}{4\alpha_1}+\frac{z_m^2}{4}) & (\frac{r_m^3}{12\alpha_1}+\frac{r_mz_m^2}{4}) & (\frac{r_m^2z_m}{4\alpha_1}+\frac{z_m^3}{12}) \end{bmatrix}$$

由式(14)得

$$A = \beta G^{-1} H_r C$$

则 r，z 向的二阶动态位移形函数矩阵的一般表达式为：

$$N_{2k} = \beta[1 \quad r \quad z]\,GH_r - \beta[(\frac{r^2}{4\alpha_1}+\frac{z^2}{4}) \quad (\frac{r^3}{12\alpha_1}+\frac{z^2r}{4}) \quad (\frac{r^2z}{4\alpha_1}+\frac{z^3}{12})]\,G^{-1}$$

综上所述，三角形三结点的二阶动态位移形函数矩阵为：

$$N_r = N_{0r} + \omega^2 N_{2r} \qquad N_z = N_{0z} + \omega^2 N_{2z} \tag{15}$$

1.2 轴对称动态有限元刚度和质量矩阵的建立

单元的动态形函数确立之后，可按动力有限元法中的类似方法推导单元的刚度矩阵和质量矩阵.

1.2.1 刚度矩阵

根据动态有限元法的概念有

$$B = B_0 + \omega^2 B_2$$

式中：B_0——静力轴对称有限元法的应变矩阵；

$$B_2 = [B_{2i} \quad B_{2j} \quad B_{2m}]$$

$$B_{2i}{}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{2ri}}{\partial r} & \frac{\partial N_{2ri}}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_{2ri}}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_{2zi}}{\partial z} & \frac{\partial N_{2zi}}{\partial r} \end{bmatrix}^{T} \qquad (i, j, m \text{ 轮换})$$

劲度矩阵

$$K^e \approx K_0{}^e + \omega^4 K_2{}^e$$

1.2.2 质量矩阵

单元的质量矩阵

$$M^e = \iint_e N^T N \mathrm{d}v = \rho \iint_e 2\pi r N^T N \mathrm{d}r\mathrm{d}z \approx M_0{}^e + \omega^4 M_2{}^e$$

由上述单元刚度矩阵和质量矩阵即可组合成总刚度与总质量矩阵，结合边界条件即可进行强夯的动力计算.

1.2.3 基频 ω 的计算

当体系的劲度矩阵 K 以及质量矩阵 M 已知后，则体系的自振频率 ω 可由下式[4]确定

$$K\delta = \omega^2 M\delta$$

此式是 ω^2 的 n 次代数方程，由此可求出 n 个自振频率，基频 ω 是其中最小的自振频率；δ 为结点位移列阵.

2 算 例 分 析

利用本文建立的公式，运用 Wilson—θ 法对两种情况进行计算与比较：即均质地基情况和地基有基岩的情况. 现以河北秦皇岛码头堆场工程为例，该码头堆场为天然沉积细砂，变形模量 E 为 6370 kPa，夯锤质量 10 t，落距为 13 m，锤底面积为 4 m^2，实测五击后夯坑深 0.37 m，计算结果见表 1，2.

表 1 均质地基情况下两种方法计算沉降量的比较

Table 1 Comparsion of two methods in the case of homogeneous foundation

夯击次数	变形模量 /kPa	ω	沉降量/m 动力有限元法	沉降量/m 动态有限元法
1	6370.0	5.30	0.1305	0.1297
2	9114.0	6.34	0.0900	0.0761
3	12211.0	7.03	0.0800	0.0705
4	13034.0	7.58	0.0715	0.0645
5	14602.0	8.02	0.0652	0.0513
总计			0.4372	0.3921

表 2 基岩处于不同深度用两种方法计算沉降量的比较

Table 2 Calculated settlements comparison of two methods in case of bedrock at different depths

土层深度 h/m	ω	沉降量/m 动力有限元法	沉降量/m 动态有限元法
2.0	15.9	0.1145	0.0752
3.0	11.5	0.1156	0.0998
4.0	9.06	0.1154	0.1092
5.0	8.58	0.1154	0.1127
7.0	8.32	0.1154	0.1148

注：计算时变形模量 $E_{土} = 6.37$ MPa，$E_{岩} = 2.0 \times 10^4$ MPa.

从表 1 可看出：(a) 动态有限元法计算沉降值较接近实测值，说明基频的影响是对动力有限元法的一种

修正，考虑其影响，可提高计算精度.(b)两种方法计算结果的相对误差随着变形模量 E 的增大而加大，因为 E 增大 ω 亦加大，动力特性的影响也变得明显了.

自表 2 可以看出：(a) 考虑基岩影响时，两种方法的计算值相差较大，基岩埋深越浅，其差值越大.这是由于基频随着基岩深度的减小而增大的原因，此时若仍然采用动力有限元法简单计算显然不合理.而且本文计算中仅考虑 ω 的二次幂，若考虑 ω 的高次幂，其影响将更明显；(b)动态有限元法计算中，沉降量随着基岩深度的增加越来越大，说明动态有限元法能很好的反映出基频 ω 这一主要动力参数对动力计算成果的影响.相反，对于一般动力有限元法，由于它无法考虑基频 ω 的影响，因而不能很好地反映基岩埋深程度的影响，由此可见，对于硬密土或基岩埋深较浅时，应采用动态有限元法为宜.(c) ω 越小，两种方法的计算值差别越小，由此可以认为，一般动力有限元法是动态有限元法在 $\omega=0$ 时的特例(从动态有限元法的表达式亦可得出这一结论).

3　结论及建议

a. 通过算例分析比较，动态有限元法的计算结果与实测值十分吻合，这表明本文提出的强夯问题的动态有限元法是一个合理可行的方法，这一方法弥补了一般动力有限元法在求解强夯问题时不能考虑基频等振动因素影响的这一严重缺陷.

b. 从算例可以看出，基频与土的硬度、土质、泊松比等有关，硬密土基频较大，而松软土基频较小；因此，对均质松软土地基，两种方法的计算结果差别较小；此时，可以用一般动力有限元法近似计算；但对于基频较大的硬密土或有基岩的地基，此时两种方法计算的结果差别较大，以采用动态有限元法为宜，该法能充分反映基频这一重要动力特征的影响，提高计算精度.

c. 本文为强夯的动力计算提供了一种新的尝试方法，文中主要对动态有限元方法作了详细的介绍和公式推导，但仍有某些问题需要进一步探讨和研究，如选用较合理的弹塑性本构模型，单元可发展多种形态加以对比等.

参 考 文 献

1　普齐米尼斯基 J S.结构矩阵分析理论.王德荣译.北京：国防工业出版社，1975，12～23

2　Cupta K K. Finite dynamic element formulation for plane triangular. Int J Num Meth Eng 1979，14：1431～1448

3　张崇文，桂国庆.三维动态八结点单元建立及理论推导.振动工程学报，1991，4(3)：60～66

4　卢盛松，吴旭光.土石坝抗震与液化分析程序(EALA).见：姜弘道编.水工结构与岩土工程的现代计算方法及程序.南京：河海大学出版社，1992.290～304

Study on Dynamic Consolidation by Finite Dynamic Element Method

Song Xiuguang　　Lu Shengsong

(*Research Institute of Geotechnical Engineering*，*Hohai Univ.*，*Nanjing* 210098)

Li Weiyin

(*Jinan Highway Administrative Bureau*，*Jinan* 250012)

Abstract　Based on the concept of dynamic shape function，a finite dynamic element method(DEM) is developed for the compulation of dynamic consolidation. Formulas of the DEM are also derived. This method overcomes the shortcomings of conventional finite element methods，i.e.，the vibration characteristics of the soil to be consolidated cannot be considered. Therefore it reflects practically the dynamic characteristics of consolidation. The programs for the DEM are also compiled. Results of practical calculation show that the method is correct and feasible.

Key words　dynamic shape function；finite dynamic element method；dynamic consolidation method