

基于几何非线性的强夯加固机理分析

Mechanism analysis of dynamic consolidation based on geometric non-linearity

谢能刚¹, 宋修广²

(1. 安徽工业大学 机械工程学院, 安徽 马鞍山 243002; 2. 山东大学 土木工程学院, 山东 济南 250018)

摘要:针对强夯法加固地基机理的数值分析中存在的几何非线性情况, 本文在应变—位移关系上采用大变形假设, 建立基于有限单元法的土体非线性动力平衡方程, 给出该非线性方程的迭代计算格式。对一具体算例进行了非线性数值分析, 得到了强夯作用过程中土体动态响应的一般规律, 为精确模拟分析强夯加固机理提供了有效途径。

关键词:强夯; 几何非线性; 有限单元法

中图分类号: TU 472.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2003)04-0472-03

作者简介:谢能刚(1971-), 男, 安徽当涂人, 1999 年获河海大学水工结构专业博士学位, 现为安徽工业大学副教授, 主要从事结构的现代设计理论及高性能计算方法研究。

XIE Neng-gang¹, SONG Xiu-guang²

(1. Anhui University of Technology, Maanshan 243002, China; 2. Shandong University, Ji'nan 250018, China)

Abstract: During mechanism analysis of consolidation of foundation soil by heavy tamping method, this paper employs large deformation hypothesis on the relationship between strain and displacement to make a non-linear dynamic equilibrium equation and to offer its iterative calculation form. With a practical example analyzed by non-linear method, the general rule of soil response under dynamic compaction and an effective path to simulate consolidation mechanism precisely are obtained.

Key words: dynamic consolidation; geometric non-linearity; finite element method

0 引言

在目前各种研究强夯问题的理论和方法中, 对土体的应变—位移关系, 大部分研究者还都采用“小变形”假定^[1-3], 蒋鹏在文献[4]中认为地基在夯击过程中的位移有很大一部分为刚体位移, 提出采用“大变形”假定, 即考虑几何非线性, 这是较为符合实际的, 但在有限元求解中对非线性控制方程进行了线性化处理, 并未进行非线性迭代计算, 并且推得的应变矩阵表达形式有误(原文式(11)行列式中第二行第四列应为 $\partial u_2 / \partial X_2$)。因此在本文的分析中, 将根据大变形假设, 建立基于有限单元法的土体非线性动力平衡方程, 推得基于几何非线性的应变矩阵表达形式, 给出非线性控制方程的迭代计算格式, 并对实际算例进行真正意义上的几何非线性分析。另外由于分析的侧重点, 在具体计算中, 应力—应变关系采用钱家欢提出的加卸载双线性强夯本构模型^[5]。

1 基于几何非线性的强夯问题分析

1.1 土体大变形问题的基本方程

将强夯加固地基的作用区域抽象为边界 S 围成的区域 Ω , X 是其中的点, 则土体大变形问题的基本方程为: 动力平衡方程(Ω)

$$[(\delta_{ik} + u_{i,k})\sigma_{ij}]_{,j} + F_i - \rho\ddot{u}_i = 0; \quad (1)$$

$$\text{应变位移关系 } \epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})/2; \quad (2)$$

$$\text{应力应变关系 } \sigma_{ij} = \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}; \quad (3)$$

$$\partial A(\epsilon_{ij})/\partial \epsilon_{ij} = \sigma_{ij}; \quad (4)$$

$$\text{位移边界条件}(S_u) \quad u_i = \bar{u}_i; \quad (5)$$

$$\text{应力边界条件}(S_p) \quad (\delta_{ik} + u_{i,k})\sigma_{ij}n_j = \bar{p}_i. \quad (6)$$

上述方程中的各物理量均以张量分量形式表示, 它们的意义分别如下: u_i 为位移分量; σ_{ij} 为应力张量分量; ϵ_{ij} 为应变张量分量; F_i 为土体体积力分量; ρ 为土体密度; $A(\epsilon_{ij})$ 为应变能密度; \bar{u}_i, \bar{p}_i 为给定的边界位移和边界外力; λ 和 G 为拉梅常数; δ_{ij} 为克氏符号; n_j 表示方向余弦。

1.2 基于有限单元法的土体非线性动力平衡方程

采用有限单元法, 将强夯作用区域的土体离散化, 任一单元体上能量泛函为

$$\Pi_e = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{V_e} \left[\frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}_e^T [N]^T [N] \{\dot{u}\}_e - A(\epsilon_{ij}) \right] dv_e + \{u\}_e^T \{F\}_e + \{u\}_e^T \{P\}_e \right\} dt. \quad (7)$$

式中 $\{u\}_e, \{\dot{u}\}_e$ 为单元结点位移列阵和速度列阵;

基金项目: 安徽省教育厅自然科学研究重点资助项目 (2003kj010zd)

收稿日期: 2002-09-24

$[N]$ 为形函数矩阵; $\{F\}_e$ 为单元内体力引起的等效结点荷载; $\{P\}_e$ 为边界上面力和接触压力引起的等效结点荷载。对式(7)进行变分处理,并令能量泛函变分为零,得单元体动力平衡方程

$$\phi[\{u\}_e] = [m]_e \{\ddot{u}\}_e + \iiint_{V_e} [\bar{B}]_e^T \{\sigma\} dv_e - (\{F\}_e + \{P\}_e) \quad (8)$$

式中 $[m]_e = \iiint_{V_e} \rho [N]^T [N] dv_e$ 为单元质量矩阵; $[\bar{B}]_e$ 为单元应变矩阵,根据式(2),应变位移关系为非线性,因此 $[\bar{B}]_e$ 为 $\{u\}_e$ 的函数,可写成

$$[\bar{B}]_e = [B_0]_e + [B_L]_e \quad (9)$$

式中 $[B_0]_e$ 为线性应变矩阵; $[B_L]_e$ 为非线性应变矩阵。将式(8)两边对 $\{u\}_e$ 求导,得

$$d\phi[\{u\}_e] = \iiint_{V_e} d[\bar{B}]_e^T \{\sigma\} dv_e + \iiint_{V_e} [\bar{B}]_e^T d\{\sigma\} dv_e \quad (10)$$

$$\text{由于 } \{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (11)$$

式中, $[D]$ 为弹性矩阵, $\{\epsilon_0\}$ 、 $\{\sigma_0\}$ 为初应变和初应力。

$$\text{因此 } d\{\sigma\} = [D]d\{\epsilon\} = [D][\bar{B}]_e d\{u\}_e \quad (12)$$

在式(9)中, $[B_0]_e$ 与结点位移 $\{u\}_e$ 无关,因此

$$d[\bar{B}]_e = d[B_L]_e \quad (13)$$

将式(12), (13)代入式(10),并将式(9)代入,最终可得

$$d\phi[\{u\}_e] = \{[k_0]_e + [k_L]_e + [k_\sigma]_e\} d\{u\}_e, \quad (14)$$

$$\text{其中 } [k_0]_e = \iiint_{V_e} [B_0]_e^T [D] [B_0]_e dv_e, \quad (15)$$

$$[k_L]_e = \iiint_{V_e} \{ [B_0]_e^T [D] [B_L]_e + [B_L]_e^T [D] [B_0]_e + [B_L]_e^T [D] [B_L]_e \} dv_e, \quad (16)$$

$$\iiint_{V_e} d[B_L]_e^T \{\sigma\} dv_e = [k_\sigma]_e d\{u\}_e, \quad (17)$$

$[k_\sigma]_e$ 称为几何刚度矩阵。

若系统 t 时的单元结点真实位移为 $\{u(t)\}_e$, 对函数 ϕ 在 $\{u(t)\}_e + \Delta\{u\}_e$ 处作 Taylor 展开, 其一阶近似为

$$\begin{aligned} \phi[\{u(t)\}_e + \Delta\{u\}_e] &= \phi[\{u(t)\}_e] + \left. \left(\frac{d\phi}{d\{u\}_e} \Delta\{u\}_e \right) \right|_{\{u\}_e = \{u(t)\}_e} \\ &= [m]_e \{\ddot{u}(t)\}_e + \iiint_{V_e} [\bar{B}]_e^T \{\sigma\} dv_e - (\{F\}_e + \{P\}_e) + \{[k_0]_e + [k_L]_e + [k_\sigma]_e\} \Delta\{u\}_e = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

根据式(11), 并取初应变和初应力 $\{\epsilon_0\}$ 、 $\{\sigma_0\}$ 为零, 得

$$\iiint_{V_e} [\bar{B}]_e^T \{\sigma\} dv_e = (\{[k_0]_e + [k_L]_e\}) \{u(t)\}_e \quad (19)$$

将式(19)代入式(18), 按单元集结并添加阻尼项, 得整体非线性动力平衡方程

$$\phi[\{u(t)\} + \Delta\{u\}] = [M] \{\ddot{u}(t)\} + [C] \{\dot{u}(t)\} + [K'] \{u(t)\} - (\{F(t)\} + \{P(t)\}) + [K] \Delta\{u\} = 0. \quad (20)$$

式中 $[K] = \sum_e \{[k_0]_e + [k_L]_e + [k_\sigma]_e\}$; $[K'] =$

$\sum_e \{[k_0]_e + [k_L]_e\}$; $[C]$ 为结构阻尼矩阵, 可采用 Rayleigh 形式, 即

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K'], \quad (21)$$

式中, $\alpha = c\omega$, $\beta = c/\omega$, c 为结构阻尼比, ω 为结构基频。

1.3 轴对称问题的应变矩阵

对于轴对称问题, 应变与位移间的非线性关系为^[6]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \cdot \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} \\ &= \{[B_0]_e + [B_L]_e\} \{u\}_e, \end{aligned} \quad (22)$$

式中, u 为沿 r 向的径向位移, w 为沿 z 向的轴向位移。经推导得

$$[B_0]_e = [L][N], [B_L]_e = \frac{1}{2} [\Delta\theta][G][N]. \quad (23)$$

$$\text{式中 } [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}; [G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix};$$

$$[\Delta\theta] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{u}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} \end{bmatrix}.$$

1.4 非线性动力平衡方程的迭代求解格式

(1) 对任意时刻 t , 将根据系统小变形动力学方程求解得到的 $\{u(t)\}_n$ 、 $\{\dot{u}(t)\}_n$ 和 $\{\ddot{u}(t)\}_n$ 作为大变形动力学方程的初始迭代值 $\{u(t)\}_1$ 、 $\{\dot{u}(t)\}_1$ 和 $\{\ddot{u}(t)\}_1$ 。系统小变形动力学方程为

$$[M] \{\ddot{u}(t)\} + [C_0] \{\dot{u}(t)\} + [K_0] \{u(t)\} = \{F\} + \{P\}, \quad (24)$$

式中, $[K_0] = \sum_e [k_0]_e$, $[C_0] = \alpha[M] + \beta[K_0]$ 。

(2) 根据大变形问题的应变与位移之间的非线性关系, 将 $\{u(t)\}_1$ 代入求得每个单元的 $[B_L]_e$, 并根据式(15)~(17), 计算得到每个单元的 $[k_0]_e$ 、 $[k_L]_e$ 和 $[k_\sigma]_e$, 组装得到 $[K']_1$ 和 $[K]_1$ 。

(3)将 $\{u(t)\}_1, \{\dot{u}(t)\}_1$ 和 $\{\ddot{u}(t)\}_1$ 以及 $[K']_1$ 和 $[K]_1$ 代入式(20),得到 $\Delta\{u\}_1$ 。

(4)采用线性加速度法,得到 t 时刻的下一代迭代值 $\{u(t)\}_2, \{\dot{u}(t)\}_2$ 和 $\{\ddot{u}(t)\}_2$ 。

(5)重复(2)到(4)的步骤,迭代格式为: $\Delta\{u\}_n = -[K]_n^{-1}(\{M\}\{\ddot{u}(t)\}_n + [C]_n\{\dot{u}(t)\}_n + [K']_n\{u(t)\}_n - [\{F(t)\} + \{P(t)\}]); \{u(t)\}_{n+1} = \{u(t)\}_n + \Delta\{u\}_n; \{\dot{u}(t)\}_{n+1} = \{\dot{u}(t)\}_n + \{\dot{u}(t)\}_{n+1}(3/\Delta t) - \{\dot{u}(t-\Delta t)\}(3/\Delta t) - 2\{\dot{u}(t-\Delta t)\} - \{\dot{u}(t-\Delta t)\}(\Delta t/2); \{\ddot{u}(t)\}_{n+1} = \{\ddot{u}(t)\}_n + \{\ddot{u}(t)\}_{n+1}(6/\Delta t^2) - \{\ddot{u}(t-\Delta t)\}(6/\Delta t^2) - \{\ddot{u}(t-\Delta t)\}(6/\Delta t) - 2\{\ddot{u}(t-\Delta t)\}$ 。其中, Δt 为时间步长, $\{u(t-\Delta t)\}, \{\dot{u}(t-\Delta t)\}$ 和 $\{\ddot{u}(t-\Delta t)\}$ 为非线性问题式(20)在 $t-\Delta t$ 时刻的位移、速度和加速度。

(6)迭代直至 $\Delta\{u\}_M \leq \bar{h}$ (\bar{h} 为事先给定的收敛判据)停止。 $\{u(t)\}_M, \{\dot{u}(t)\}_M$ 和 $\{\ddot{u}(t)\}_M$ 即为式(20)在 t 时刻的解。

2 算例分析

2.1 计算说明

济南绕城高速公路工程,现场黄土地基,容重 19.0 kN/m^3 ,夯锤重 98 kN ,落距 10 m ,锤底面积 3.9 m^2 。对强夯的第一击进行计算,计算时输入的最大接触应力为 940 kPa ,接触时间为 90 ms ,时程曲线简化为等腰三角形,加荷模量取 6000 kPa ,卸荷模量取 24000 kPa ,泊松比取 0.40 ,阻尼比取 0.15 。有限元离散区域取垂直深度为 16.0 m ,水平半径 5.0 m 。土体底部边界条件为 $u = w = 0$;侧面边界条件为 $w = 0$;表面非夯击区的接触力为零。初始条件为 $u|_{t=0} = 0, w|_{t=0} = 0, \dot{u}|_{t=0} = 0, \dot{w}|_{t=0} = 0, \ddot{u}|_{t=0} = 0, \ddot{w}|_{t=0} = 0$ 。

2.2 计算结果及分析

图1为计算所得的夯坑形状,与现场实测情况较吻合,实测的单击最大夯沉量为 19.57 cm ,计算所得的最大夯沉量为 20.11 cm ,误差不到 3% 。图2为夯锤下部不同深度土体的竖向位移时程曲线,由图2可见,随着深度的增加,位移峰值出现的时间依次滞后,大小依次递减,这反映了应力波在土体中的传播特性。图3

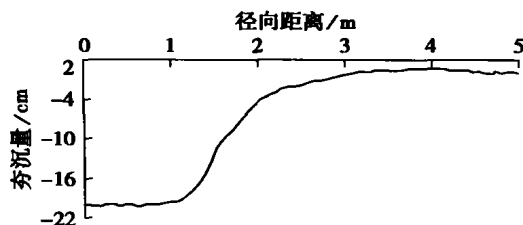


图1 计算所得夯坑形状
Fig.1 The calculated shape of compaction crater

为夯锤中心下部不同深度土体应力 $p(z)$ 与表面接触应力 p_0 的比值曲线;图4为夯锤中心下部不同深度土体的沉降 $w(z)$ 与表面沉降 w_0 的比值曲线。

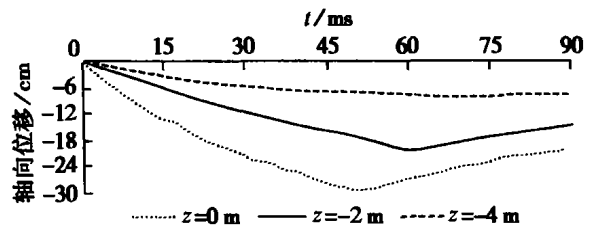


图2 夯锤下部不同深度土体的轴向位移时程曲线
Fig.2 Time curve of axial displacement in different depth of soil

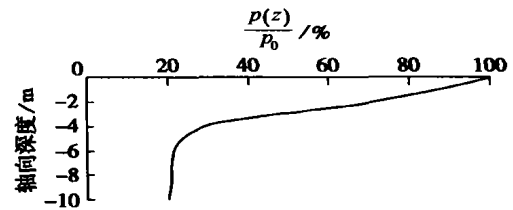


图3 不同轴向深度的应力比值曲线
Fig.3 Stress ratio in different depth

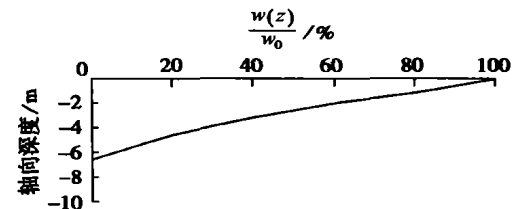


图4 不同轴向深度的位移比值曲线
Fig.4 Displacement ratio in different depth

3 结 语

在强夯问题的分析中考虑几何非线性,在力学分析上更为精细,在模型上更为符合强夯加固的实际特征。本文给出的非线性控制方程和迭代计算方法为精确模拟分析强夯加固机理提供了有效途径。

参考文献:

- [1] 吴铭炳,王钟琦.强夯机理的数值分析[J].工程勘察,1989,(3):1-4.
- [2] 孔令伟,袁建新.强夯的边界接触应力与沉降特性研究[J].岩土工程学报,1998,20(2):86-92.
- [3] 陈洁,李尧臣,周顺华.强夯法加固地基的数值模拟[J].上海铁道大学学报,2000,21(12):1-7.
- [4] 蒋鹏,李荣强,孔德坊.强夯大变形冲击碰撞数值分析[J].岩土工程学报,2000,22(2):222-226.
- [5] 钱家欢,帅方生.边界元法在地基强夯加固中的应用[J].中国科学(A辑).1987,(3):329-336.
- [6] 朱伯芳.有限单元法原理与应用(第二版)[M].北京:中国水利水电出版社,1998.96-103.