

# 强夯加固机理的大变形数值分析

蔡袁强, 陈仁伟, 徐长节

(浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027)

**摘要:** 强夯过程的动力响应问题非常复杂, 理论上难以用解析方法进行分析 and 求解, 目前已有的数值分析方法多为小变形分析方法. 考虑到强夯过程中实际土体的变形基本上属于大变形, 因此采用大变形几何非线性有限元法分析强夯加固机理. 在强夯计算模型中, 引入 P 波阻尼和 S 波阻尼的概念来说明土体的材料阻尼特性, 同时运用改进人工边界法来模拟波在人工边界上的传播. 为了保证模型的网格稳定, 计算程序中增加了液化单元分析. 通过一个工程实例, 对其加固深度、变形特征、应力分布进行了数值分析, 对比结果验证了强夯大变形分析的正确性.

**关键词:** 强夯; 有限元法; 大变形; 材料阻尼; 人工边界

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1008-973X(2005)01-0065-05

## Numerical analysis of dynamic compaction using large deformation theory

CAI Yuan-qiang, CHEN Ren-wei, XU Chang-jie

(Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** The dynamic response analysis of dynamic compaction is very complicated and it is difficult to adopt analytic method. Present numerical methods were based on small deformation model, but actually the deformation during dynamic compaction were rather large. So the geometric nonlinear and large deformation finite element method was used to analyze the impact mechanism of dynamic compaction. P wave and S wave were used to clarify the material characteristics of the soil in the model. The finite improved artificial boundary conditions were applied to simulate the waves propagation at the boundary. Liquefaction element method was used in the calculation program for ensuring the mesh stability of the model. An engineering example was studied through the numerical analysis on the improved depth, deformation behavior and stress distribution. Comparative results verified the reliability of the large deformation analysis.

**Key words:** dynamic consolidation; finite element method; large deformation; material damping; artificial boundary condition

强夯法加固地基就是利用巨大的夯击能, 在地基中产生冲击波和动应力对地基土进行挤密, 提高土的强度并降低其压缩性. 但是夯击过程的动力响应问题非常复杂, 理论上难以用解析方法进行分析 and 求解, 于是各种数值计算方法就应运而生.

吴铭炳等人<sup>[1]</sup>、李本平<sup>[2]</sup>和 GU 等人<sup>[3]</sup>从弹塑性模型入手, 对强夯加固机理进行了细致的动力有

限元分析, 但这些分析都是基于经典力学中的小变形假定. 在实际夯击过程中, 尤其是高能量强夯作用下, 夯坑周围土体将产生很大的变形破坏区域, 刚体位移是土体形成一定深度的垂直变形的主要原因, 而且高能夯击的首击夯沉量往往超过 1 m, 小变形度量的有限元法不能真实反应刚体位移的影响. 钱家欢等人<sup>[4]</sup>应用边界元法对强夯问题进行了研究,

得出了锤底应力的变化规律和动应力与接触时间的关系曲线,但是没有考虑夯锤自重,也不适用于分析高能强夯的全过程.

从 20 世纪 70 年代开始,人们就用有限元法和各种人工边界来模拟地基的近场波动问题,其中应用较广的有加权平均逼近法<sup>[5]</sup>、吸收边界法<sup>[6]</sup>和透射边界法<sup>[1,7]</sup>等.对于强夯引起的振动问题,本文应用有限元和无限元的耦合系统进行模拟<sup>[8]</sup>,通过分析人工边界外部无限域对人工边界的作用力来模拟波在人工边界的传播,具有概念清楚,计算简便,且容易和有限元数值解法相结合等优点.

## 1 强夯大变形模型的建立

### 1.1 本构关系

目前尚没有专门适合于强夯加固的本构关系.本文采用了加卸载双线性模型<sup>[4]</sup>,对每一次夯击使用一种加荷模量与卸荷模量,不同的夯击采用不同的变形模量.基于 Lagrange 描述方法,以 Kirchhoff 应力张量和 Green 应变张量表示的本构关系如下:

$$T_{ij} = D_{ijkl} E_{kl}. \quad (1)$$

式中:  $D_{ijkl}$  为四阶弹性张量,对各向同性材料  $D_{ijkl}$  可用两个独立的弹性常数  $E$  和  $\mu$  (或  $\lambda$  和  $G$ ) 表示.对于轴对称问题,若记

$$T = [T_{11} \quad T_{22} \quad T_{12} \quad T_{33}]^T, \quad (2)$$

$$E = [E_{11} \quad E_{22} \quad E_{12} \quad E_{33}]^T, \quad (3)$$

可得到和小变形线性弹性形式完全一样的本构方程如下:

$$T = DE, \quad (4)$$

式中:  $D$  为弹性矩阵.

### 1.2 大变形有限元的动力平衡方程

几何非线性动力平衡方程的推导采用了改进拉格朗日法.以  $t$  时刻构形为参考构形,在求解  $t + \Delta t$  时刻构形时不考虑  $t$  时刻构形的变形,即  $t$  时刻单元应变为零,  $t + \Delta t$  时刻单元应变就是单元应变增量.对于轴对称问题,添加了阻尼项的几何非线性有限元系统的动力平衡方程为<sup>[9]</sup>

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + K_T \circ \Delta U = R_{t+\Delta t} - F_t. \quad (5)$$

式中:  $M$  为质量矩阵,  $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ 、 $\dot{U}_{t+\Delta t}$ 、 $\Delta U$  分别为  $t + \Delta t$  时刻待求的加速度、速度和沉降量,  $R_{t+\Delta t}$  为荷载向量,  $F_t$  为节点力向量,  $C$  为阻尼矩阵,采用 P 波阻尼和 S 波阻尼因子表示,  $K_T$  为整体切线刚度矩阵:

$$K_T = \sum_e k_0^e + \sum_e k_\sigma^e + \sum_e k_L^e, \quad (6)$$

其中,  $k_L^e$  为单元大位移刚度矩阵,是由大位移引起的结构刚度变化,是  $\Delta U$  的一阶和二阶函数,对几何非线性有限元,线性化求解一般采用舍去大位移刚度矩阵的方法,所以,

$$K_T = \sum_e k_0^e + \sum_e k_\sigma^e, \quad (7)$$

式中:  $k_0^e$  为单元小位移刚度矩阵,

$$k_0^e = \int_v B_L^T D B_L dv, \quad (8)$$

$$B_L = LN. \quad (9)$$

式中:  $N$  为单元形函数矩阵,  $B_L$  为线性几何矩阵,形式完全与小变形问题的几何矩阵相同,

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{1}{X_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$k_\sigma^e$  为单元初应力刚度矩阵:

$$k_\sigma^e = \int_v G^T \sigma G dv, \quad (11)$$

$$G_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X_2} & 0 & \frac{N_i}{X_1} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix};$$

$i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  为单元节点数,  $(12)$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I_{2 \times 2} & \sigma_{12} I_{2 \times 2} & 0 \\ \sigma_{21} I_{2 \times 2} & \sigma_{22} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

比较小变形条件下的刚度矩阵  $K = \sum_e \int_v B^T D B dv$ , 可见考虑大变形之后整体刚度矩阵更加复杂,在力学度量上更趋合理,也更符合强夯加固的实质.

因为 Rayleigh 阻尼的参数不易通过试验获得,本文在各向同性弹性材料的应力应变关系基础上,引用了 P 波阻尼和 S 波阻尼的概念来说明土体的材料阻尼特性,其运动方程分别为<sup>[8]</sup>

$$(\lambda + 2G)(u_{i,jj} + 2\eta_P \dot{u}_{i,jj}) = \rho \ddot{u}_i, \quad (14)$$

$$G(u_{i,jj} + 2\eta_S \dot{u}_{i,jj}) = \rho \ddot{u}_i. \quad (15)$$

式中:  $\lambda$  为 Lamé 常数,  $G$  为剪切模量,  $\eta_P$  为 P 波阻尼因子,  $\eta_S$  为 S 波阻尼因子.按照与推导单元小位移刚度矩阵类似的步骤,就能推导出单元的阻尼矩阵.

### 1.3 人工边界条件

强夯产生的各种波向外传播,影响甚远,所以要

在土体中设置人工边界, 在有限离散模型的边界上处理无限远边界条件. 本文采用凌道盛<sup>[8]</sup>提出的改进人工边界法, 通过分析人工边界外部无限域对人工边界的作用力来模拟波在人工边界的传播, 概念清楚, 计算简便, 且容易和有限元数值解法相结合. 无限区域对人工边界的分布作用力为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} t_x(0, t) \\ t_y(0, t) \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{u}_b(0, t) \\ \dot{v}_b(0, t) \end{vmatrix} + \\ &\begin{vmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u_b(0, t)}{\partial s} \\ \frac{\partial v_b(0, t)}{\partial s} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

式中:  $u_b(0, t)$  和  $v_b(0, t)$  分别为人工边界的位移,  $s$  为人工边界的曲线坐标.

由式(16)可以看出, 人工边界外无限区域对人工边界的作用力不仅和边界点的速度有关, 还和该点沿切线方向的位移导数有关. 这也说明对于二维问题单纯采用阻尼边界是不合适的, 还必须包括一个非对称的虚源. 人工边界单元的阻尼矩阵和刚度矩阵为

$$c_{ij} = \begin{vmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{vmatrix} \int_{l_e} \bar{N}_i \bar{N}_j ds, \quad (17)$$

$$k_{ij} = - \begin{vmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{vmatrix} \int_{l_e} \bar{N}_i \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial s} ds. \quad (18)$$

式中:  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\eta_1 = \beta\eta_2$ ;  $\eta_2 = \sqrt{G\rho}$ ;  $k = (\beta - 2)G$ , 其中  $\beta = \sqrt{2(1 - \mu)/(1 + 2\mu)}$ ,  $\mu$  为泊松比,  $n$  为边界单元节点数,  $\bar{N}_i$  为第  $i$  节点的插值形函数.

### 1.4 强夯冲击荷载的形式

对于强夯产生的冲击荷载, 很多学者都进行过理论研究和实际观测. 理论研究方面有边界元法<sup>[4]</sup>、动力接触有限元法<sup>[10]</sup>、积分变换和传递矩阵法<sup>[11]</sup>等, 均得到了相似的动应力与接触时间的关系曲线, 为强夯冲击荷载模式的简化提供了一定的理论依据. 根据大量的实测结果, 夯锤对地面冲击碰撞过程中, 应力波为一尖峰, 均没有明显的第二应力波. 于是可将强夯产生的瞬态荷载简化成三角形<sup>[1,2]</sup>, 使计算结果和实测数据有一定的可比性. 所以, 本文采用把冲击荷载简化为三角形的方法, 如图 1 所示, 图中  $\sigma$  为锤底接触动应力,  $t$  为接触时间.

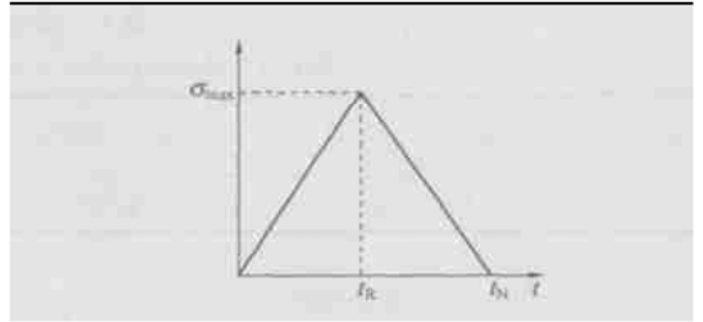


图 1 强夯荷载瞬态模型

Fig. 1 Instantaneous model of compaction load

编制了相关的有限元程序, 可以用来分析动力固结的轴对称问题. 而且, 在单元计算过程中引入液化单元分析, 以消除单元应力过大引起的网格失稳现象. 然后用一些简单例子对程序进行求证后, 即可用来模拟高能量强夯的加固过程.

淳安千岛湖某工程大面积炸山抛填, 碎石粒径大小不一, 回填厚度为 0.3 ~ 30 m, 采用强夯法处理地基. 夯锤重量 220 kN, 夯锤直径 2.2 m, 夯锤落距 22 m, 地基土容重 16 kN/m<sup>3</sup>. 计算模型的地基厚度取 16.5 m, 场地半径取 11 m, 计算断面和单元划分如图 2 所示, 共分 240 个 8 节点轴对称等参单元和 785 个节点, 动力计算的时步取 50.

从图 3 看出, 夯击沉降量随着夯击次数的增加而增大, 单击夯沉量逐渐减少, 计算结果与现场实测数据吻合得较好. 在每一次夯击过程中, 夯坑周围都将形成一定范围的塑性区, 性质比较复杂, 而加卸载模型对每一次夯击均采用弹性假定, 使得计算结果与实测结果相比要偏小; 强夯过程中土体将产生一定的水平位移, 表明强夯对水平向也有一定的加固作用, 但这在计算时将被忽略, 这也是计算结果要小于实际的夯击沉降量的原因.

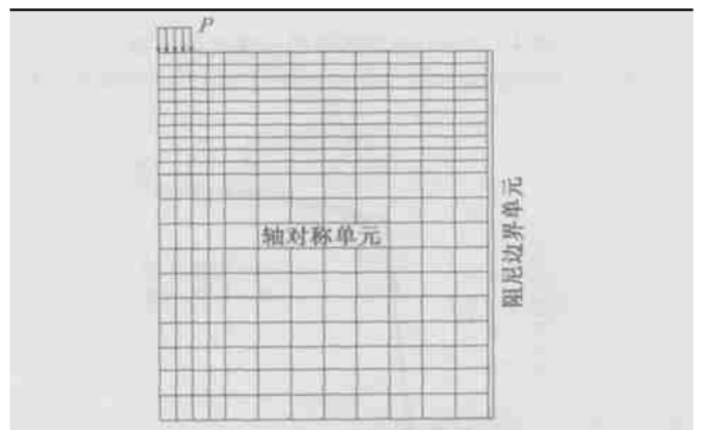


图 2 强夯计算断面与单元划分

Fig. 2 Calculation section and partition cell of dynamic compaction

## 2 实例分析

本文根据以上大变形理论和改进人工边界法,

表 1 强夯有限元主要计算参数

Tab.1 Parameters for dynamic compaction FEM calculation

$\eta_p$	$\eta_s$	$\mu$	$\sigma_{max} / \text{MPa}$	$t_R / \text{s}$	$t_N / \text{s}$	初始加载模量/ MPa	初始卸载模量/ MPa
$7.0 \times 10^{-4}$	$7.8 \times 10^{-4}$	0.35	6.23	0.044	0.088	11	58.32

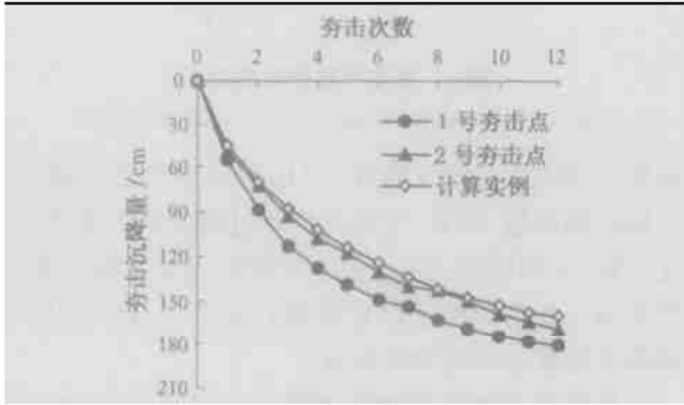


图 3 夯击沉降量与夯击次数的关系

Fig.3 Relation between compacting settlement and compacting number

图 4、5 反映的是不同夯击次数夯坑周围的地表沉降.不同夯击次数的夯坑形状相似,各次夯击后夯坑形状完整、夯坑平直,计算结果和实测结果的变化趋势基本一致.计算所得的最终夯沉量为 161.14 cm,和实测的 170.0 cm 极其相近,表明应用大变形理论分析高能强夯的有效性.

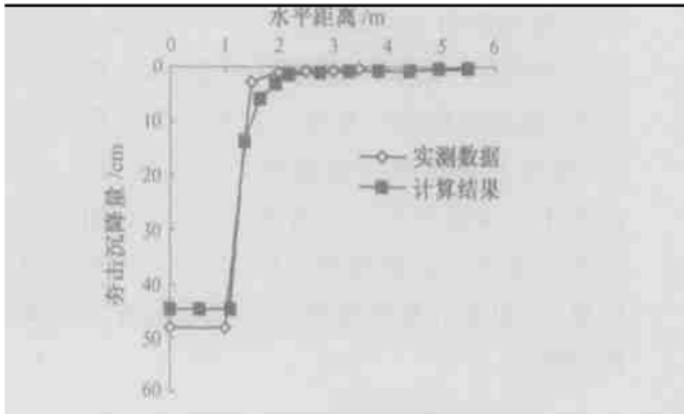


图 4 N=1 夯坑周围的地表沉降曲线

Fig.4 Vertical displacement at soil surface when N=1

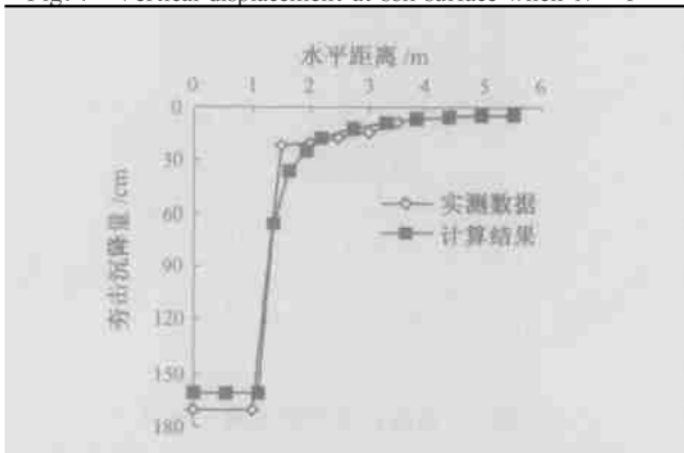


图 5 N=12 夯坑周围的地表沉降曲线

Fig.5 Vertical displacement at soil surface when N=12

图 6 给出了夯锤中心点以下地基土夯沉量沿深度的衰减情况.随着深度的增加,夯击沉降量迅速变小,距地表 4.4 m 处,沉降量降为 36.78 cm;当到达 8.8 m 时沉降量已经很小,仅为 3.65 cm.由图中曲线的变化趋势可以看出,地基土的夯沉量集中在深度 8.8 m 以内,而工程实际中瑞利波检测到的强夯加固深度为 8.5 ~ 10.5 m,可见计算结果符合工程实际.

图 7 表示夯坑中心下不同深度的竖向位移的时程曲线.由图可知,土体内各点位移的最大值并不发生在冲击荷载达到峰值的时刻,而是要滞后一段时间,土体表面达到最大位移的时间在冲击荷载刚好结束附近.随着深度的增加,滞后现象越来越明显,从而可以看出土体竖向位移沿深度逐渐发展的情况.在最大位移发生之后,回弹的沉降量是很少的.

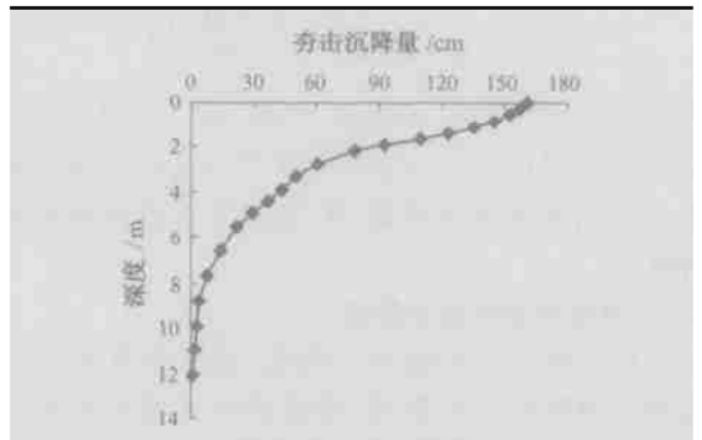


图 6 夯坑下方竖向位移沿深度的分布曲线

Fig.6 Curve of vertical displacement at different depth under the crater

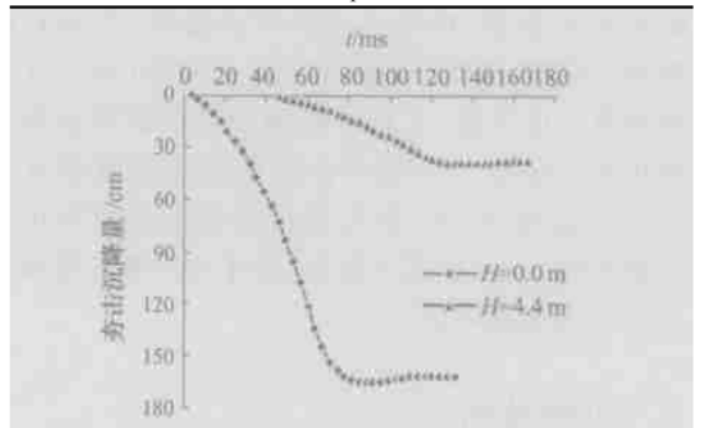


图 7 夯坑下方竖向位移的时程曲线

Fig.7 Curve of time and vertical displacement under crater

图 8 表示夯坑下方最大竖向动应力沿深度的分布曲线. 表面最大动应力的平均值是  $6.09 \times 10^3$  kPa, 和输入的冲击荷载  $6.23 \times 10^3$  kPa 接近, 在地表以下 4.4 m 处, 最大动应力迅速衰减为  $0.902 \times 10^3$  kPa, 这与夯击沉降量随深度变化的规律相似.

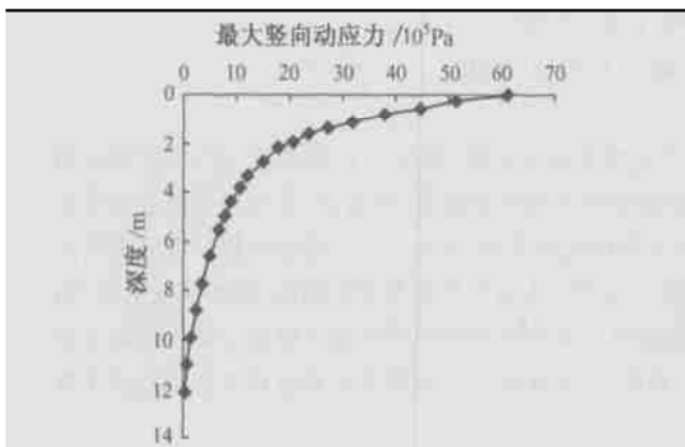


图 8 夯坑中心最大竖向动应力沿深度的衰减曲线

Fig. 8 Curve of maximum dynamic stress at different depth under the crater

### 3 结 语

本文采用大变形理论研究强夯加固过程, 无论是从力学度量上还是从工程实际上考虑, 都更符合强夯加固地基的实质. 其中引用的 P 波阻尼和 S 波阻尼的概念, 具有明确的物理意义, 容易通过试验识别确定. 采用本文提出的轴对称几何非线性有限元和人工边界的耦合体系, 对强夯过程进行数值模拟, 然后用实测资料进行验算对比, 其结果基本符合土体变形规律, 具有较好的可靠性, 对工程实践具有指导意义.

随着夯击次数的增加, 夯击沉降量逐渐趋于稳定, 说明存在最佳夯击数. 在夯点周围的浅层区域内, 竖向位移和动应力峰值都很大, 但是随着深度增大迅速衰减. 地基土在不同深度的夯击沉降量, 并不是当冲击荷载达到峰值时发生的, 而是沿着深度依次达到最大值, 其间存在滞后现象.

本文采用的加卸载双线性模型在很多方面尚待改进, 如果能在大变形理论的基础上, 再考虑每一次夯击引起的弹塑性变形, 将使结果更符合实际情况. 所以, 关于如何建立一个合理可行的强夯本构关系, 是将来研究强夯问题的关键.

### 参考文献 (References):

[1] 吴铭炳, 王钟琦. 强夯机理的数值分析 [J]. 工程勘察, 1989, 3: 1-5.  
WU Ming-bing, WANG Zhong-qi. Numerical analysis of

the mechanism of dynamic compaction [J]. **Engineering Investigation**, 1989, 3: 1-5.

[2] 李本平. 有限元法分析强夯加固机理 [D]. 杭州: 浙江大学, 1993.

LI Ben-ping. Finite element method analysis of the mechanism of dynamic compaction [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 1993.

[3] GU Q, LEE F H. Ground response to dynamic compaction of dry sand [J]. **Geotechnique**, 2002, 52(7): 481-493.

[4] 钱家欢, 帅方生. 边界元法在地基强夯加固中的应用 [J]. 中国科学(A辑), 1987, 3: 329-336.

QIANG Jia-huan, SHUAI Fang-sheng. Application of the Boundary Element Method in the dynamic compaction of soils [J]. **China Science (Volume A)**, 1987, 3: 329-336.

[5] WHITE W, VALLIAPPAN S, LEE K. Unified boundary for finite dynamic models [J]. **Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE**, 1977, 103(EM5): 949-964.

[6] DEGRANDE D, DE ROECK G. An absorbing boundary condition for wave propagation in saturated poroelastic medium I: Formulation and efficiency evaluation [J]. **Soil Dynamic and Earthquake Engineering**, 1993, 12: 411-421.

[7] 廖振鹏. 近场波动问题的有限元解法 [J]. 地震工程与工程振动, 1984, 4(2): 18-25.

LIAO Zhen-peng. Finite Element Method solution of the wave motion in near field [J]. **Earthquake Engineering and Engineering Vibration**, 1984, 4(2): 18-25.

[8] 凌道盛. 冲击和地震荷载作用下地基的响应动力分析 [R]. 杭州: 浙江大学, 1999

LIN Dao-sheng. Dynamic analysis of response of the soils under the impact and seismic loading [R]. Hangzhou: Zhejiang University, 1999.

[9] 何君毅, 林祥都. 工程结构非线性问题的数值解法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1994.

[10] 蒋鹏, 李荣强, 孔德坊. 强夯大变形冲击碰撞数值分析 [J]. 岩土工程学报, 2000, 22(2): 222-226.

JIANG Peng, LI Rong-qiang, KONG De-fang. Numerical analysis of large deformation impact and collision properties during dynamic compaction [J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2000, 20(2): 222-226.

[11] 孔令伟, 袁建新. 强夯的边界接触应力与沉降特性研究 [J]. 岩土工程学报, 1998, 20(2): 86-92.

KONG Lin-wei, YUAN Jian-xin. Study on surface contact stress and settlement properties during dynamic consolidation [J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1998, 20(2): 86-92.