

单桩极限承载力实例分析灰色预测

周恺华¹ 李志斌² 叶观宝² 徐超²

(1. 上海宏巨置业有限公司, 上海, 200030; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海, 200092)

摘要 该文简要介绍了 GM(1,1)模型的建模及精度检验方法。依据单桩载荷试验中桩顶沉降随荷载变化的特征,建立了单桩极限承载力的预测模型,并通过工程实例对单桩极限承载力进行了灰色预测。

关键词 灰色预测 单桩 极限承载力 载荷试验

单桩极限承载力是桩基设计中的重要参数。确定单桩极限承载力的方法很多(如静载荷试验、动载荷试验、理论分析及经验公式等),目前研究得较为清楚、较为可靠的方法仍是静载荷试验。随着社会的发展,大型建筑越来越多,基桩的吨位也越来越大,静载荷试验要做到破坏也越来越困难。基桩静载荷试验中,因各种原因未做到破坏的情况时有发生,如何根据这些不完整的资料来确定该桩的极限承载力便摆在了我们面前。

灰色系统理论是由邓聚龙提出并建立起来的,目前已广泛应用于全社会的各个领域。它是将研究的问题看成一个系统,如果该系统既含有已知信息又含有未知信息或未确定的信息,则称之为灰色系统^[1]。单桩极限承载力是一个十分复杂的问题,影响因素多,对各种影响因素的确定既没有也不可能达到很精确的程度。因此,将其视为一个灰色系统来加以研究,是完全可以也是很必要的^[2]。本文根据灰色系统理论建立单桩极限承载力的预测模型,并进行了工程实例的验证。

1 单桩极限承载力灰色模型 GM(1,1)的建立

通过单桩静载试验,得出每级荷载下沉降的实测值,如果把沉降 S 看作为广义时间上的沉降,则可建立荷载序列的一阶动态微分方程 GM(1,1)模型。记原始荷载序列为 {P⁽⁰⁾(i) | i=1,2,...,n}, 原始沉降序列为 {S⁽⁰⁾(i) | i=1,2,...,n}, 对它们进行一次累减生成新序列为 {P⁽¹⁾(i) | i=1,2,...,n} 和 {S⁽¹⁾(i) | i=1,2,...,n}。

其中: $P^{(1)}(i) = P^{(0)}(i) - P^{(0)}(i-1)$ (1)

$S^{(1)}(i) = S^{(0)}(i) - S^{(0)}(i-1)$ (2)

按照灰色系统的建模方法,可以得到一个一阶线性动态微分方程,记为 GM(1,1):

$$\frac{dp^{(0)}}{ds^{(0)}} + aP^{(0)} = u$$
 (3)

式中 a (mm⁻¹) 为发展系数; u (kN/mm) 为灰作用量。它们由下列式子确定:

$$\begin{Bmatrix} a \\ u \end{Bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n$$
 (4)

$$B = \begin{bmatrix} S^{(1)}(2) \\ S^{(1)}(3) \\ \dots \\ S^{(1)}(n) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[P^{(0)}(1) + P^{(0)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[P^{(0)}(2) + P^{(0)}(3)] & 1 \\ \dots & \dots \\ -\frac{1}{2}[P^{(0)}(n-1) + P^{(0)}(n)] & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_n = [P^{(1)}(2) P^{(1)}(3) \dots P^{(1)}(n)]^T$$
 (5)

方程(3)的解为:

$$\hat{P}^{(0)}(i+1) = [P^{(0)}(1) - \frac{u}{a}] e^{-a[S^{(0)}(i+1) - S^{(0)}(1)]} + \frac{u}{a}$$
 (6)

或 $S^{(0)}(i+1) = S^{(0)}(1) - \frac{1}{a} \ln \frac{P^{(0)}(i+1) - \frac{u}{a}}{P^{(0)}(1) - \frac{u}{a}}$ (7)

上两式即为 P-S 曲线的灰色模型公式。在进行单桩极限承载力预测时, a 值一般为正数,故当

$S \rightarrow \infty$ 时, $\hat{P}^{(0)} \rightarrow u/a$, 即单桩的极限荷载为:

收稿日期: 2003-11-28

第一作者简介: 周恺华, 1969年02月生, 上海宏巨置业有限公司工程师、经济师。

$$P_u = \frac{u}{a} \quad [3]$$

2 模型精度检验

预测值的精度和外推效果如何,一般采用后验差法进行检验,其求法如下:①按预测模型作递推计算,逐次求出预测值;②求残差;③求有关中间值;④求后验差比值 C 及小误差频率 P,如果经检验不合格,可建立残差 GM(1,1)模型进行修正。

令残差 $\varepsilon(i) = S^{(0)}(i) - \hat{S}^{(0)}(i), i = 1, 2, \dots, n,$
残差均值: $\bar{\varepsilon}$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon(i) \quad (8)$$

$$\text{原始数据均值: } \bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S^{(0)}(i) \quad (9)$$

$$\text{原始数据方差 } S_1: S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S^{(0)}(i) - \bar{S})^2 \quad (10)$$

$$\text{残差方差 } S_2: S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon(i) - \bar{\varepsilon})^2 \quad (11)$$

$$\text{后验差比值 } C: C = S_2/S_1 \quad (12)$$

$$\text{小误差频率 } P: P = \{ |\varepsilon(i) - \bar{\varepsilon}| < 0.6745S_1 \} \quad (13)$$

$$\text{相对误差 } e(i): e(i) = \varepsilon(i)/S^{(0)}(i) \times 100\% \quad (14)$$

一个好的预测,要求 C 越小越好, P 越大越好,一般要求 $C < 0.35, P > 0.90$ 。按照 C 与 P 值大小,可将预测精度分为 4 个等级,如表 1 所示。另外,从 $e(i)$ 值的大小,也可直观地看出预测精度的高低^[4]。

表 1 预测精度等级划分

Tab. 1 Grade division for precision of prediction

预测精度	好	合格	勉强	不合格
C	$C < 0.35$	$0.35 \leq C \leq 0.50$	$0.50 \leq C \leq 0.65$	$C \geq 0.65$
P	$P > 0.95$	$0.95 \geq P \geq 0.80$	$0.80 \geq P \geq 0.70$	$P \leq 0.70$

3 工程实例

本文结合工程实际情况,编制了灰色预测的计算程序,就下面两个实例进行分析。

实例一:对上海某工程试桩中的 4 根预制钢筋混凝土方桩静载荷试验数据进行灰色预测,计算结果见表 2。从表中可见,灰色预测法预测的单桩极限承载力接近载荷试验破坏的荷载,而且预测精度较高,证明了灰色模型预测单桩极限承载力的可行性和合理性。

表 2 上海某工程试桩极限承载力灰色预测

Tab. 2 The gray prediction for the ultimate bearing capacity of single pile for a project in Shanghai

桩号	34#		271#		452#		554#	
	P/kN	S/mm	P/kN	S/mm	P/kN	S/mm	P/kN	S/mm
原始数据	152	0.89	152	0.84	152	1.13	152	0.89
	228	1.66	228	1.27	228	1.84	228	1.43
	304	2.59	304	2.09	304	2.67	304	2.51
	380	3.45	380	3.13	380	3.67	380	3.72
	456	4.83	456	4.45	456	4.59	456	5.32
	532	10.01	532	9.51	532	5.99	532	8.07
	608	103.68	608	104.24	608	9.97	608	13.37
					684	111.18	684	108.11
预测值	541.93		542.87		651.22		632.88	
C	0.281		0.243		0.126		0.091	
P(%)	100		100		100		100	
等级	好		好		好		好	

实例二:对上海市某住宅小区试桩中的 8 根预制钢筋混凝土桩静载荷试验数据进行灰色预测,结果如表 3 所示,模型精度检验如表 3 中的 $e(\%)$ 和表 4 中的 $C、P$,可见 $C < 0.35、P > 0.95$,故灰色模型的预测结果是比较理想的。

从表 3、4、图 1 和实测 $P-S$ 曲线中可以看出,桩号为 12-51、12-78 和 13-74 的桩预测的沉降相对误差比较小,同时这三根桩的实测 $P-S$ 曲线比较平缓;桩号为 11-78 和 13-52 的桩预测的沉降相对误差比较大,同时这两根桩的实测 $P-S$ 曲线不平缓。这说明了 $P-S$ 曲线越平缓的载荷试验,采用灰色预测的结果精度就越高,反之亦然。

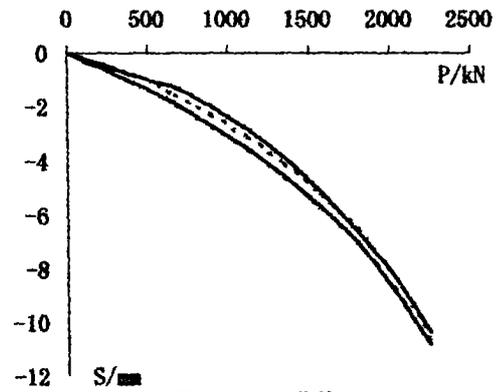


图 1 $P-S$ 曲线

Fig.1 $P-S$

注:上在为 13-52 号桩,下面为 13-78 号桩,
实线为实测值,虚线为预测值

表 3 灰色模型预测单桩极限承载力

Tab.3 The gray prediction model for the ultimate bearing capacity of single pile

桩号	栏目	加载等级 P/kN									预测值 (kN)
		450	675	900	1125	1350	1575	1800	2025	2250	
10-45	S/mm 实测	1.02	1.84	2.50	3.18	3.87	4.80	5.66	6.77	7.61	6213.7
	S/mm 预测			2.48	3.25	4.06	4.91	5.80	6.74	7.73	
	$e(\%)$			0.9	-2.3	-5.0	-2.3	-2.5	0.4	-1.6	
10-72	S/mm 实测	0.93	1.50	2.37	3.21	4.25	5.53	7.06	8.98	11.08	2823.3
	S/mm 预测			2.45	3.35	4.38	5.58	7.02	8.82	11.22	
	$e(\%)$			-3.5	-4.4	-3.1	-1.0	0.5	1.8	-1.2	
11-51	S/mm 实测	0.81	1.39	2.15	3.08	4.13	5.37	6.73	8.32	9.96	3141.8
	S/mm 预测			2.34	3.23	4.22	5.34	6.64	8.18	10.07	
	$e(\%)$			-9.0	-4.8	-2.2	0.5	1.3	1.7	-1.1	
11-78	S/mm 实测	0.62	1.00	1.53	2.33	3.20	4.16	5.23	6.54	8.04	2944.9
	S/mm 预测			1.79	2.49	3.27	4.17	5.23	6.52	8.18	
	$e(\%)$			-17	-6.7	-2.1	-0.1	0	0.3	-1.7	
12-51	S/mm 实测	0.92	1.60	2.37	3.16	4.00	4.96	5.96	7.06	8.28	4239.6
	S/mm 预测			2.37	3.16	4.02	4.95	5.96	7.06	8.29	
	$e(\%)$			0	0	-0.5	0.2	0	0	-0.1	
12-78	S/mm 实测	1.00	1.57	2.26	3.05	3.94	5.02	6.31	7.89	9.72	2870.3
	S/mm 预测			2.33	3.11	4.00	5.03	6.26	7.78	9.78	
	$e(\%)$			-2.9	-1.9	-1.5	-0.2	0.8	1.4	-0.6	
13-52	S/mm 实测	0.91	1.29	2.00	2.83	3.87	5.15	6.62	8.24	10.37	2752.2
	S/mm 预测			2.29	3.12	4.06	5.18	6.53	8.25	10.60	
	$e(\%)$			-15	-10	-5.0	-0.6	1.4	-0.1	-2.2	
13-74	S/mm 实测	1.21	1.90	2.68	3.55	4.56	5.69	7.02	8.77	10.83	2913.8
	S/mm 预测			2.70	3.57	4.56	5.70	7.06	8.72	10.87	
	$e(\%)$			-0.6	-0.5	0	-0.2	-0.6	0.6	-0.4	

表 4 灰色模型预测单桩极限承载力精度等级

Tab.4 Precision of grade on gray prediction model for the ultimate bearing capacity of single pile

桩号	10-45	10-72	11-51	11-78	12-51	12-78	13-52	13-74
C	0.045	0.031	0.038	0.039	0.005	0.022	0.045	0.009
P (%)	100	100	100	100	100	100	100	100
等级	好 P	好	好	好	好	好	好	好

4 结论

(1) 由于桩的 P-S 曲线本身含有灰参数的因素,运用灰色理论建立的 GM(1,1) 模型具有计算严密、精度高的优点,可用少量的观测数据得到精度较高的预测值,方法简便,具有较好的社会效益,不失为一种较好的单桩极限承载力的预测方法。

(2) 载荷试验 P-S 曲线越平缓,采用灰色预测的结果就越精确;反之,如果 P-S 曲线有突变或者不平缓,采用灰色预测的结果误差就会比较大。

(3) 后验差比值 C 和小误差频率 P 仅能在总体上表明预测精度,不能反映预测曲线上某一点的

精度;相对误差 e 能够直观的反映每点预测值的精度,两者结合起来可以很好地判别预测的精度。

参考文献:

- [1] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1988.
- [2] 彭柏兴. 灰色模型在推测单桩竖向极限承载力中的应用[J]. 勘察科学技术, 1998, (5):15~18.
- [3] 邓建刚, 傅旭东, 罗云华. 单桩极限承载力的预测[J]. 勘察科学技术, 2003, (2):9~12.
- [4] 朱定华, 陈国兴. 复合地基承载力的灰色预测[J]. 南京建筑工程学院学报, 2001, (3):32~36.

Case study on grey prediction of single pile ultimate bearing capacity

Zhou Kaihua¹ Li Zhibin² Ye Guanbao² Xu Chao²

(1. Shanghai Hongju Real Estate Limited company, 200030;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092)

Abstract: This paper briefly introduces the establishment and precision examination method of the GM(1,1) model. Based on the characteristic that the pile top settlement changes with the load during the single pile plate load test, the grey prediction model of the single pile ultimate capacity was established. Moreover by case histories, the grey prediction was conducted for the single pile ultimate bearing capacity.

Keywords: grey prediction, single pile, ultimate bearing capacity, plate load test